Resolução da primeira lista de exercícios do curso MAE0328 disponível no Texto de Regressão (Paula, 2023).

1. Seja T um estimador de θ e suponha que exista $\mathrm{E}(T)$ e $\mathrm{E}(T^2)$, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{(T-\theta)^2\} &= \mathrm{E}[\{T-\mathrm{E}(T)+\mathrm{E}(T)-\theta\}^2], \text{ pois } \exists \mathrm{E}(T)\\
&= \mathrm{E}[\{T-\mathrm{E}(T)\}^2+\{\mathrm{E}(T)-\theta\}^2-2\{T-\mathrm{E}(T)\}\{\mathrm{E}(T)-\theta\}]\\
&= \mathrm{E}[\{T-\mathrm{E}(T)\}^2]+\{\mathrm{E}(T)-\theta\}^2, \text{ pois } \exists \mathrm{E}(T^2)\\
&= \mathrm{Var}(T)+\{\mathrm{Viés}(T)\}^2.
\end{aligned}$$

2. Considere uma amostra aleatória independente de tamanho $n = 3$ de uma variável X com média μ_X e variância σ_X^2. Tome para μ_X os seguintes estimadores $T_1 = (1/5)(X_1 + 3X_2 + X_3)$, $T_2 = (1/2)(X_1 + 2X_3)$, $T_3 = (1/4)(2X_1 + X_2 + X_3)$ e $T_4 = (1/3)(X_1 + X_2 + X_3)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Viés}(T_1) &= \frac{1}{5}\mathrm{E}(X_1+3X_2+X_3)-\mu_X = 0,\\
\mathrm{Viés}(T_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_1+2X_3)-\mu_X = \frac{1}{2}\mu_X,\\
\mathrm{Viés}(T_3) &= \frac{1}{4}\mathrm{E}(2X_1+X_2+X_3)-\mu_X = 0,\\
\mathrm{Viés}(T_4) &= \frac{1}{3}\mathrm{E}(X_1+X_2+X_3)-\mu_X = 0.
\end{aligned}$$

Pela independência, também

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(T_1) &= \frac{1}{25}\mathrm{Var}(X_1+3X_2+X_3) = \frac{11}{25}\sigma_X^2,\\
\mathrm{Var}(T_2) &= \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_1+2X_3) = \frac{5}{4}\sigma_X^2,\\
\mathrm{Var}(T_3) &= \frac{1}{16}\mathrm{Var}(2X_1+X_2+X_3) = \frac{3}{8}\sigma_X^2,\\
\mathrm{Var}(T_4) &= \frac{1}{9}\mathrm{Var}(X_1+X_2+X_3) = \frac{1}{3}\sigma_X^2.
\end{aligned}$$

Logo, temos que $\mathrm{EQM}(T_1) = (11/25)\sigma_X^2$, $\mathrm{EQM}(T_2) = (1/4)(5\sigma_X^2 + \mu_X^2)$, $\mathrm{EQM}(T_3) = (3/8)\sigma_X^2$ e $\mathrm{EQM}(T_4) = (1/3)\sigma_X^2$. Dessa forma, dentre os estimadores não tendenciosos, T_4 tem o menor erro quadrático médio seguido por T_3 e T_1, respectivamente.

3. Considere a seguinte regressão linear simples $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \epsilon_i$, em que $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Sabemos que $\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x}$ e $\hat{\beta}_2 = S_{xy}/S_{xx}$ são os estimadores dos parâmetros da regressão linear simples. Logo, para

$r_i = y_i - \hat{y}_i$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\bar{y}, \hat{\beta}_2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(y_i, \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\right) \\
&= \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left\{y_i, \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})y_j\right\} \\
&= \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})\mathrm{Cov}\left(y_i, y_j\right) \\
&= \frac{1}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\mathrm{Cov}\left(y_i, y_i\right), \text{ pois } \mathrm{Cov}(y_i, y_j) = 0, \forall i \neq j \\
&= \frac{\sigma^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0. \\
\sum_{i=1}^{n} r_i\hat{y}_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i\hat{y}_i - \hat{y}_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i\{\bar{y} + \hat{\beta}_2(x_i - \bar{x})\} - \{\bar{y} + \hat{\beta}_2(x_i - \bar{x})\}^2\right] \\
&= n\bar{y}^2 + \hat{\beta}_2 S_{xy} - n\bar{y}^2 - \hat{\beta}_2^2 S_{xx} = 0. \\
\sum_{i=1}^{n} r_i x_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i x_i - \hat{y}_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i(x_i - \bar{x} + \bar{x}) - \{\bar{y} + \hat{\beta}_2(x_i - \bar{x})\}x_i\right] \\
&= S_{xy} + n\bar{y}\bar{x} - n\bar{y}\bar{x} - \hat{\beta}_2 S_{xx} = 0. \\
\sum_{i=1}^{n} r_i &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \bar{y} - \hat{\beta}_2(x_i - \bar{x})\right] \\
&= n\bar{y} - n\bar{y} - \hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0. \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(r_i + \hat{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i, \text{ pois } \sum_{i=1}^{n} r_i = 0.
\end{aligned}$$

4. Considere que foi ajustado através do método de mínimos quadrados o seguinte modelo de regressão $\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$, porém o verdadeiro modelo é expresso por $y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 z + \epsilon$, em que $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Sabemos que $\hat{\beta}_2 = S_{xy}/S_{xx}$ no modelo ajustado, então para uma amostra independente

de tamanho n do modelo verdadeiro temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat\beta_2) &= \mathrm{E}(S_{xy}/S_{xx}) \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)\mathrm{E}(y_i) \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)(\beta_1+\beta_2 x_i+\beta_3 z_i) \\
&= \frac{\beta_2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)x_i + \frac{\beta_3}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar x)z_i \\
&= \beta_2+\beta_3\frac{S_{xz}}{S_{xx}}.
\end{aligned}$$

Portanto o estimador $\hat\beta_2$ do modelo ajustado é tendencioso, pois $\mathrm{E}(\hat\beta_2)\neq\beta_2$, de modo que $\mathrm{Viés}(\hat\beta_2)=\beta_3 S_{xz}/S_{xx}$.

5. Considere uma amostra independente de tamanho n do seguinte modelo $y_i=\beta_1+\beta_2 x_i+\epsilon_i$, em que $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0,\sigma^2)$, $i=1,\ldots,n$. Suponha que foram ajustados através de mínimos quadrados dois modelos expressos por: (i) $\hat y=\beta_1+\hat\gamma_2 x$ e (ii) $\hat y=\hat\beta_1+\hat\beta_2 x$, note que no modelo (i) o intercepto verdadeiro β_1 é conhecido. Sabemos que no modelo (ii) de regressão linear simples $\hat\beta_2=S_{xy}/S_{xx}$ e $\mathrm{Var}(\hat\beta_2)=\sigma^2/S_{xx}$.

   Note que modelo (i) pode ser expresso na forma matricial como $\hat{\mathbf{z}}=\mathbf{X}\hat\gamma_2$, em que $\mathbf{z}=(y_1-\beta_1,\ldots,y_n-\beta_1)^\top$ e $\mathbf{X}=(x_1,\ldots,x_n)^\top$. Devido a $\mathbf{X}$ ser uma matriz coluna, desde que $r(\mathbf{X})=1$, temos

$$\begin{aligned}
\hat\gamma_2 &= (\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{y} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar x\beta_1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar x\bar y + n\bar x\bar y - n\bar x\beta_1}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar x^2 + n\bar x^2} \\
&= \frac{S_{xy}+n\bar x(\bar y-\beta_1)}{S_{xx}+n\bar x^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat\gamma_2) &= \sigma^2(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar x^2 + n\bar x^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{S_{xx}+n\bar x^2}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\gamma}_2) &= \mathrm{E}\left\{\frac{S_{xy} + n\bar{x}(\bar{y} - \beta_1)}{S_{xx} + n\bar{x}^2}\right\} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\beta_1 + \beta_2 x_i) + n\bar{x}(\beta_1 + \beta_2\bar{x} - \beta_1)}{S_{xx} + n\bar{x}^2} \\
&= \frac{\beta_2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})x_i + n\bar{x}^2\beta_2}{S_{xx} + n\bar{x}^2} = \beta_2,
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
& S_{xx} + n\bar{x}^2 \geq S_{xx}, \text{ pois } n\bar{x}^2 \geq 0 \\
\implies & \frac{\sigma^2}{S_{xx} + n\bar{x}^2} \leq \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \\
\implies & \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx} + n\bar{x}^2}} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}} \implies \mathrm{EP}(\hat{\gamma}_2) \leq \mathrm{EP}(\hat{\beta}_2).
\end{aligned}$$

Portanto, com a adição da informação do conhecimento do intercepto verdadeiro o estimador de mínimos quadrados do modelo de regressão linear simples continua não tendencioso e apresenta menor erro padrão. Logo, conhecer o intercepto verdadeiro torna o estimador do coeficiente angular mais preciso.

6. Considere o seguinte modelo de regressão linear múltipla $y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i$ em que $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, $\mathbf{x}_i = (1, \ldots, x_{ip})^\top$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$, para $i = 1, \ldots, n$. Para testar $\mathrm{H}_0 : \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$ contra $\mathrm{H}_1 : B_j \neq 0$, para pelo menos algum $j = 2, \ldots, p$, sabemos que a estatística F do teste de razão de verossimilhanças observada é expressa por

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \frac{\mathrm{SQReg}/(p-1)}{\mathrm{SQRes}/(n-p)} \\
&= \frac{(n-p)}{(p-1)} \frac{\mathrm{SQReg}}{\mathrm{SQRes}} \\
&= \frac{(n-p)}{(p-1)} \frac{\mathrm{SQReg}/\mathrm{SQT}}{(1 - \mathrm{SQReg}/\mathrm{SQT})} \\
&= \frac{(n-p)}{(p-1)} \frac{\mathrm{R}^2}{(1 - \mathrm{R}^2)}, \text{ pois } \mathrm{R}^2 = \mathrm{SQReg}/\mathrm{SQT}.
\end{aligned}$$

7. Considere a Tabela B3 apresentada em Montgomery et al. (2021), em que são descritas as seguintes variáveis: `y`: Consumo (gpm) e `x`: Cilindrada (in^3) de uma amostra de $n = 32$ automóveis de marcas diferentes. A Figura 1 mostra o diagrama de dispersão entre o consumo e a cilindrada dos automóveis com a reta ajustada do modelo de regressão linear simples

considerado na sequência, notamos descritivamente uma relação linear decrescente entre as cilindradas e o consumo dos automóveis.

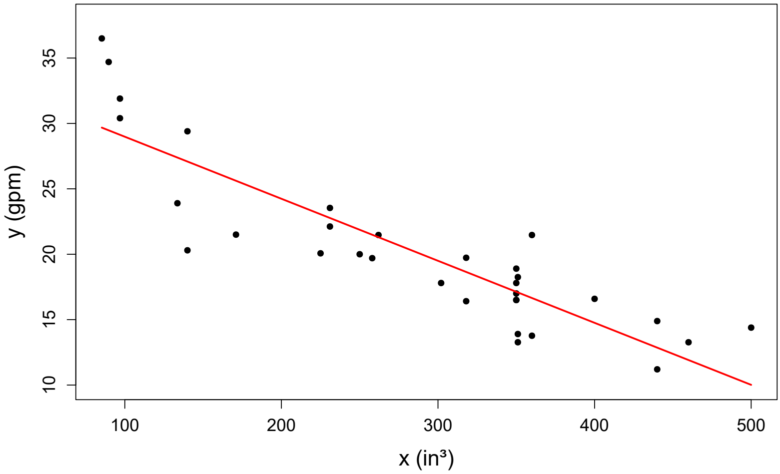

Figura 1 Diagrama de dispersão entre o consumo (y) e a cilindrada (x) dos automóveis com a reta ajustada do modelo de regressão linear simples.

Usando que $\bar{y} = 20.22312$, $\bar{x} = 284.7312$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 14324.74$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3019001$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 164118.10$, para o modelo de regressão linear simples temos $S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = -20142.84$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 424701$ e $\mathrm{SQT} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 = 1237.54$. Portanto,

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\{S_{xx}\mathrm{SQT}\}^{\frac{1}{2}}} = -0.879, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\mathrm{SQT} - \hat{\beta}_2 S_{xy}}{(n-p)} = 9.407,$$
$$\hat{\beta}_2 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = -0.047, \quad \hat{\beta}_1 = \bar{y} - \hat{\beta}_2\bar{x} = 33.727.$$

Logo,

$$\widehat{\mathrm{EP}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{nS_{xx}}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1.446, \quad \widehat{\mathrm{EP}}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}\left\{\frac{1}{S_{xx}}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0.005.$$

Sabemos que o $\mathrm{IC}(\beta_i;\ 95\%)$ é da forma $[\hat{\beta}_i \pm t_{(0.975,30)}\widehat{\mathrm{EP}}(\hat{\beta}_i)]$, logo $\mathrm{IC}(\beta_1;\ 95\%) = [30.775, 36.680]$ e $\mathrm{IC}(\beta_2;\ 95\%) = [-0.057, -0.038]$. Portanto com o aumento de 100 unidades na cilindrada do automóvel temos a diminuição de $4.7[3.8, 5.7]$ na média do consumo.

Também temos que $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\hat{\sigma}^2\bar{x}/S_{xx} = -0.006$. Denotando o estimador da média do consumo de um automóvel de $\mathtt{x} = 300$ cilindradas por $\hat{T} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 300$, temos que $\text{IC}(T;\ 97\%) = [\hat{T} \pm t_{(0.985,30)}\widehat{\text{EP}}(\hat{T})] = [18.253, 20.745]$, com

$$\widehat{\text{EP}}(\hat{T}) = \left\{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1) + 300^2\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2) + 600\widehat{\text{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)\right\}^{\frac{1}{2}} = 0.547.$$

8. Considere o conjunto de dados apresentado no Cap.7 em Ruppert (2004) em que são descritas as seguintes variáveis: `Tbill`: Taxa de retorno livre de risco; `SP500`: Retorno do mercado; `Micro`: Retorno Microsoft; `GE`: retorno GE e `FORD`: retorno FORD de janeiro de 2002 a abril de 2003. Todos os retornos são diários e estão em porcentagem. Defina os excessos de retorno das ações de cada uma das empresas durante o t-ésimo período por $\texttt{rMicro}_t = (\texttt{Micro}_t - \texttt{Tbill}_t)$; $\texttt{rGE}_t = (\texttt{GE}_t - \texttt{Tbill}_t)$; $\texttt{rFORD}_t = (\texttt{FORD}_t - \texttt{Tbill}_t)$, e o excesso de retorno do mercado por $\texttt{rSP500}_t = (\texttt{SP500}_t - \texttt{Tbill}_t)$. A Figura 2 mostra os diagramas de dispersão (com tendência) entre os excessos de retorno das ações de cada uma das empresas e o excesso de retorno do mercado, vemos que descritivamente que todas as ações têm uma relação linear crescente com `rSP500`.

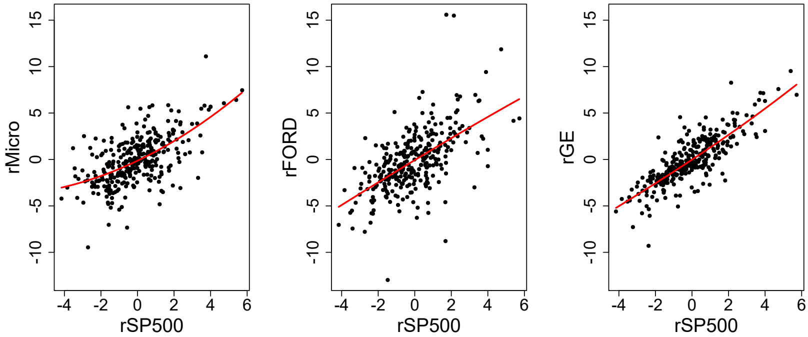

Figura 2 Diagramas de dispersão (com tendências cúbicas) entre os excessos de retorno das ações de cada uma das empresas e o excesso de retorno do mercado.

Ajustamos o seguinte modelo de regressão linear simples para cada ação $y_t = \alpha + \beta\texttt{rSP500}_t + \epsilon_t$, em que y_t são os excessos de retorno das empresas e $\epsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} \text{N}(0, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$. Note que o parâmetro β é o risco sistemático com a seguinte interpretação da relação entre o excesso de retorno e o mercado: $\beta = 1$: equivalência (volatilidade similar ao mercado); $\beta > 1$: superior (ação mais volátil do que o mercado) e $\beta < 1$: inferior (ação menos volátil do que o mercado). O intercepto é incluído para controlar eventuais precificações incorretas, porém em geral o teste $\text{H}_0 : \alpha = 0$ não é rejeitado.

A Tabela 1 apresenta as estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados e os erros padrões. A Figura 3 mostra os gráficos da análise de resíduos dos três modelos ajustados, verificamos que em todos os modelos as suposições de homocedasticidade da variância, independência e normalidade das observações parecem satisfeitas, apesar de alguns pontos serem extremos a distribuição normal.

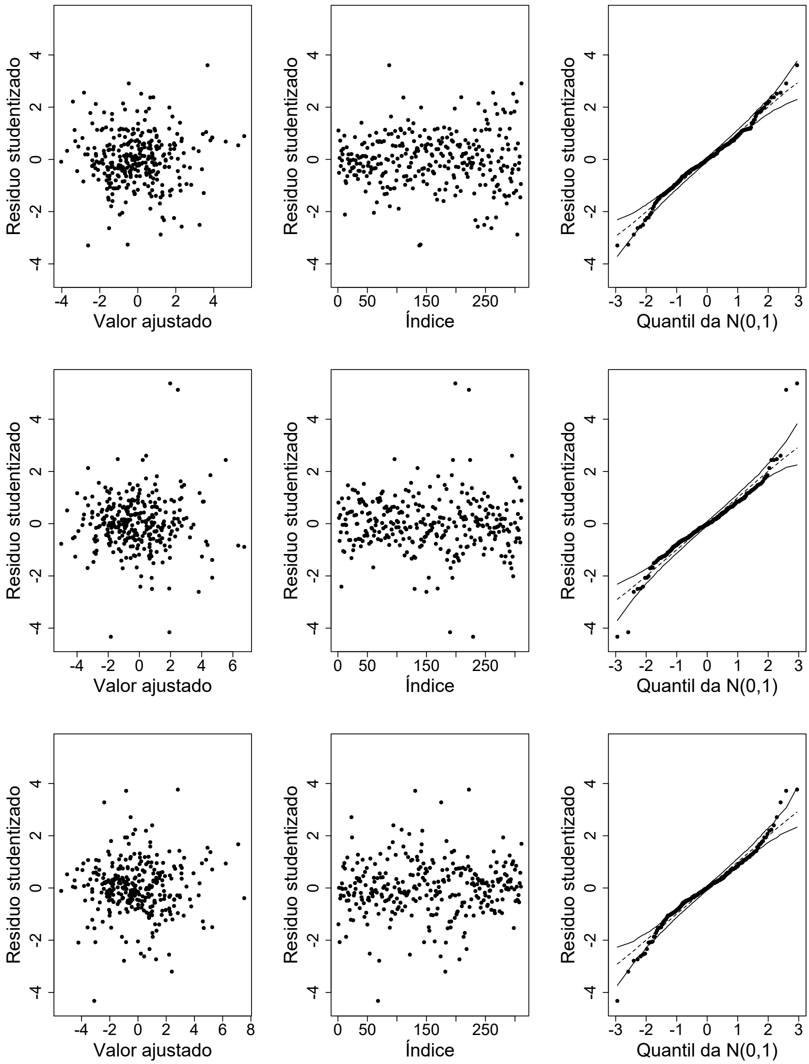

Figura 3 Análise de resíduos: Gráfico do resíduo studentizado contra valor ajustado na primeira coluna; Gráfico do resíduo studentizado contra índice das observações na segunda coluna e Gráfico normal de probabilidade do resíduo studentizado com banda de 95% de confiança na terceira coluna. Os gráficos da análise relativos aos modelos para `rMicro`, `rFORD` e `rGE` estão respectivamente na primeira, segunda e terceira linha.

Temos que o IC(β; 95%) é da forma $[\hat{\beta} \pm t_{(0.975,309)}\widehat{\mathrm{EP}}(\hat{\beta})]$, logo os intervalos de confiança para o risco sistemático são $[0.83, 1.12]$ para `rMicro`, $[1.01, 1.37]$ para `rFORD` e $[1.21, 1.41]$ para `rGE`. Assim, as ações da FORD e GE são mais voláteis do que o mercado e a ação da Microsoft tem volatilidade similar.

Tabela 1 Estimativas dos parâmetros e erros padrões dos modelos ajustados para relacionar os excessos de retorno das ações de cada empresa com o mercado.

Retorno	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	valor-P
	α	0.02	0.12	0.8417
`rMicro`	β	0.97	0.07	< 0.0001
	σ	2.12		
	α	-0.07	0.15	0.6236
`rFORD`	β	1.19	0.09	< 0.0001
	σ	2.66		
	α	0.02	0.08	0.8344
`rGE`	β	1.31	0.05	< 0.0001
	σ	1.48		

E, finalmente, a Figura 4 apresenta a banda de confiança com coeficiente de confiança de 0.95 para prever o excesso de retorno num determinado dia dado o excesso de retorno do mercado de cada ação, que é dada por $\left[\mathbf{z}^\top\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm \sqrt{c_{0.05}}\hat{\sigma}\left\{1 + \mathbf{z}^\top(\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{z}\right\}^{\frac{1}{2}}\right], \forall \mathbf{z} \in I\!R^2$, em que, para cada ação, $\boldsymbol{\beta} = (\alpha, \beta)^\top$, $\mathbf{z} = (1, \texttt{rSP500})^\top$, $c_{0.05}$ é tal que $\mathrm{P}\{F_{(2,309)} \leq c_{0.05}\} = 0.95$ e $\mathbf{X}$ é a matriz modelo.

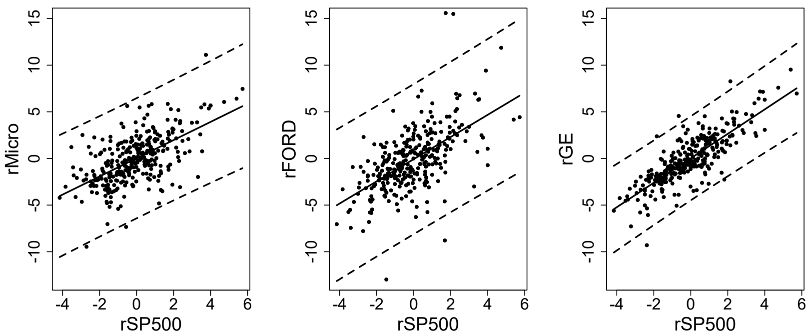

Figura 4 Banda de confiança com coeficiente de confiança de 0.95 para prever o excesso de retorno num determinado dia dado o excesso de retorno do mercado de cada ação.

9. Considere o seguinte modelo $y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$, em que $\epsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, para $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n_i$. O modelo pode ser expresso de forma matricial como $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{e}$, com $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)^\top$ e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \\ \vdots \\ \\ y_{k1} \\ \vdots \\ y_{kn_k} \end{bmatrix}_{(n\times 1)}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1\,0 \cdots\ 0 \\ \vdots \\ 1\,0 \cdots\ 0 \\ 0\,1 \cdots\ 0 \\ \vdots \\ 0\,1 \cdots\ 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0\,0 \cdots\ 1 \\ \vdots \\ 0\,0 \cdots\ 1 \end{bmatrix}_{(n\times k)},$$

em que $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Dessa forma $r(\mathbf{X}) = k$ é completo, logo temos que

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} &= (\mathbf{X}^\top\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top\mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} n_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & n_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Portanto $\hat{\mu}_i = \bar{y}_i, \forall i = 1, \dots, k$. Também, denotando $r_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$ temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(r_{ij}) &= \mathrm{Var}(y_{ij}) + \frac{1}{n_i^2}\sum_{j=1}^{n_i} \mathrm{Var}\left(y_{ij}\right) - \frac{2}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} \mathrm{Cov}\left(y_{ij}, y_{ik}\right) \\ &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{2\sigma^2}{n_i} \\ &= \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n_i}\right), \text{ para } i = 1, \dots, k \text{ e } j = 1, \dots, n_i. \end{aligned}$$

Referências

Montgomery DC, Peck EA, Vining GG (2021) Introduction to Linear Regression Analysis, 6th Edition. Wiley

Paula GA (2023) Regressão linear múltipla (versão parcial preliminar). Notas de aula atualizadas em 03-23 do curso MAE0328

Ruppert D (2004) Statistical and Finance. Springer