# EDO com autovalores complexos: caso geral

Vimos o caso da EDO linear $Y' = A \cdot Y$, com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, cujos autovalores são $\lambda = a \pm ib$.

<u>Exercício</u>: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz $2\times 2$ com coeficientes reais. Mostre que os autovalores de $A$ são complexos não reais, se e somente se $(a-d)^2 + 4bc < 0$.

Como vimos em aula, se as entradas da matriz $A$ são reais, seu polinômio característico $p_A(\lambda)$ tem coeficientes reais e, portanto, suas raízes não reais aparecem em pares de complexos conjugados.

Suponha então que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e os autovalores de $A$ são $\alpha \pm i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$. Se $w$ um autovetor associado ao autovalor $\alpha + i\beta$. Podemos separar as partes real e imaginária das coordenadas de $w$ e escrever

$$w = \begin{bmatrix} u_1 + i v_1 \\ u_2 + i v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u + i v$$

onde $u$ e $v$ são vetores reais.

<u>Exemplo</u>: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 9/2$

- Autovalores de $A$ são $3/2 \cdot (1 \pm i)$
- Autovetores associados $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ com $2y = (-1 \pm 3i)\, x$.

$$w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \pm 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vejamos o que acontece ao igualarmos as partes real e imaginária da igualdade

$$A \cdot w = (\alpha + i\beta) w.$$

$$Aw = A(u + iv) = Au + iAv$$

$$(\alpha + i\beta) \cdot w = (\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)$$

Portanto, como dois números complexos são iguais se e somente se suas partes reais e suas partes imaginárias são iguais, concluímos que

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases} \iff \boxed{A \cdot \begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha + i\beta = \frac{3}{2} + i\frac{3}{2}$, $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \checkmark$$

---

Isto é, se denotamos $S = \begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix}$, temos que

$$A \cdot S = S \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

e, assumindo que sabemos que $S$ é invertível, podemos escrever

$$A = S \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \implies e^A = S \cdot e^{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}} \cdot S^{-1}$$

$$= S \cdot \left( e^{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \right) \cdot S^{-1}$$

Isto é, nesse caso descobrimos que a nova matriz $S$, cujas colunas são as partes real e imaginária de $w$, autovetor associado a $\alpha + i\beta$, não diagonaliza $A$ (claro), mas "converte-a" na matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

cuja exponencial sabemos calcular. Portanto, podemos, novamente, resolver $Y' = A \cdot Y$ e encontrar

$$\boxed{Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0 = S \cdot \left( e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \operatorname{sen} \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right) \cdot S \cdot Y_0}$$

<u>Exemplo</u>: $Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot Y \Rightarrow Y(t) = e^{t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix}} \cdot Y_0 \Rightarrow$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \left( e^{3/2 t} \begin{bmatrix} \cos \frac{3t}{2} & \operatorname{sen} \frac{3t}{2} \\ -\operatorname{sen} \frac{3t}{2} & \cos \frac{3t}{2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

# Retrato de Fase

O retrato de fase desta equação é uma "deformação linear" do espaço de fase de

$$Y' = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot Y \qquad\qquad Y' = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -5/2 & 1\end{bmatrix}\cdot Y$$