Universidade de São Paulo

Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”

Estatística Geral

Professor

Fábio Prataviera

Variáveis aleatórias Contínuas

Uma variável aleatória contínua é uma função definida sobre o espaço amostral, que associa valores em um intervalo de números reais.

Exemplos:

- Espessura de um item;
- Tempo necessário para completar um teste;
- Tempo de espera numa fila;
- Peso.

Observação: Uma variável aleatória que toma um número finito ou infinito contável de valores, é denominada variável aleatória discreta, <u>enquanto uma que tomo um número infinito não contável de valores é denominada de variável aleatória contínua.</u>

Para variáveis aleatórias contínuas introduzimos a **função densidade de probabilidade (fdp)**, tal que,

$$\text{(a)}\quad f(x) \geq 0$$

$$\text{(b)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

A condição **(a)** implica que a densidade é uma função é não negativa e a condição **(b)** corresponde ao fato de que a soma (**integral no caso de variáveis contínuas)** das probabilidades é igual a um. A integração de ±oo significa que devemos integrar sobre todos os valores de **x** em que **f(x)** é definida.

Qualquer função **f(x)** satisfazendo **(a)** e **(b)** é uma fdp.

Note que para variáveis contínuas as somas são substituídas por integrais.

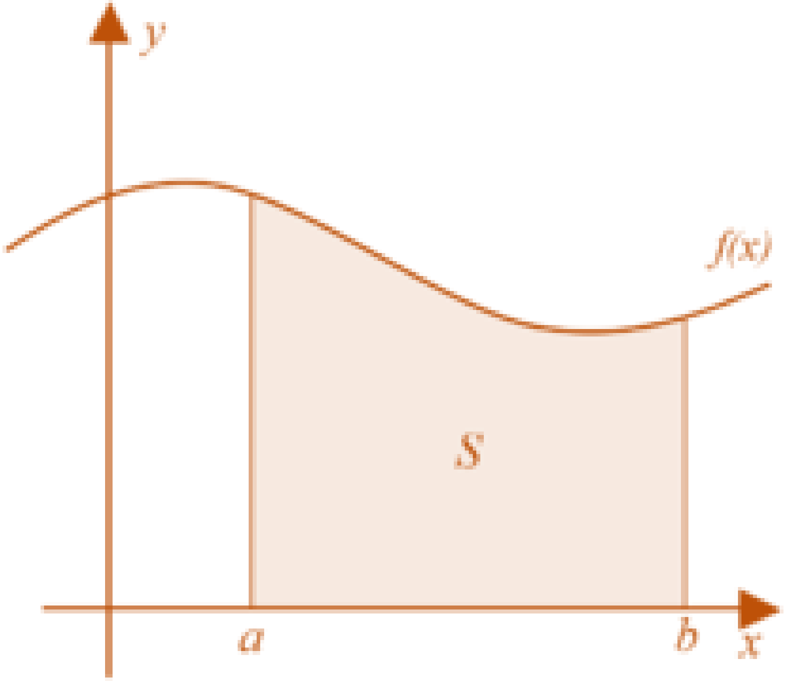
$Para\ variáveis\ contínuas\ não\ podemos\ obter\ a\ probabilidade\ de\ x\ ter\ o\ valor\ num\ ponto\ (x = a), ou\ seja, temos\ que\ considerar\ a\ probabilidade\ de\ x\ assu\ mir\ valores\ num\ intervalo\ a < x < b.$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad representa\ a\ probabilidade\ de\ x\ assumir\ valores\ no\ intervalo\ a < x < b.$$

Temos que P(X=a)=0

$Note\ que,\ como\ a\ probabilidade\ da\ variável\ x\ assumir\ valor\ num\ dado\ ponto\ é\ nula, temos\ que{:}\ P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$

Geometricamente



Área entre a fdp f(x) e o eixo x

no intervalo $a \leq x \leq b, S = P(a \leq x \leq b)$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) verifique se f(x) é uma fdp.

(b) Calcule a probabilidade de x assumir vaores no intervalo $2 < x < 3$

(a) Temos que $f(x) \geq 0$ *e* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^4 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\,x\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\,(4-1) = 1$

portanto f(x) é uma fdp.

(b) Temos: $P(2 < x < 3) = \int_2^3 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\,x\Big|_2^3 = \frac{1}{3}\,(3-2) = \frac{1}{3}$

Do mesmo modo que para variáveis discretas, podemos definir para variáveis contínuas a média, a variância e o desvio padrão. Lembando que introduzimos a fdp associada a variável aleatória considerada e substituímos as somas por integrais.

Assim, para a variável aleatória **X**, temos:

Média (μ): $$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Variância (σ^2): $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$$

Desvio-padrão: $$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Exemplo: Considere a fdp considerada anteriormente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) Calcule a média da variável aleatória X.

(b) Calcule a variância e o desvio padrão de X.

(a) Temos: $$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_1^4 x\left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_1^4 x\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{6}(4^2 - 1^2) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

(b) Temos: $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_1^4 (x - \frac{5}{2})^2 \left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (x - \frac{5}{2})^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{3}{4}$$

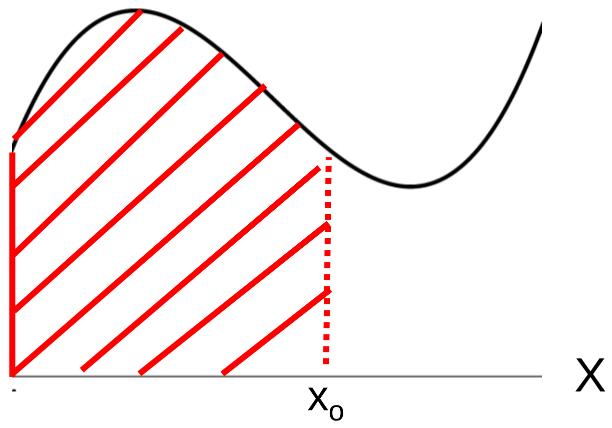
e assim: $$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Função Distribuição Acumulada

A função distribuição acumulada (fda) F(x) é a probabilidade de que $X \leq x_o$, ou seja,

$$F(x_o) = P(X \leq x_o) = \int_{-\infty}^{x_o} f(x)\, dx$$

F(x) é análoga a distribuição de frequências relativas acumuladas (ou % acumuladas) estudadas no início do curso



Área até x_o $=F(x_o)=P(X \leq x_o)$

A Distribuição Uniforme

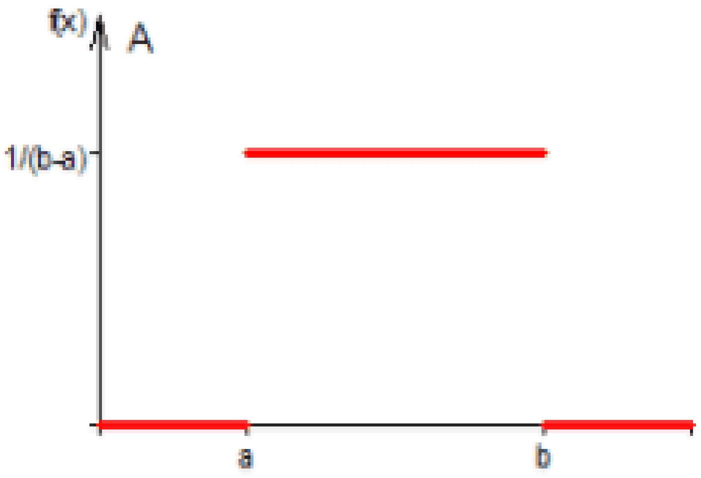
Para a Distribuição Uniforme a fdp é dada por:

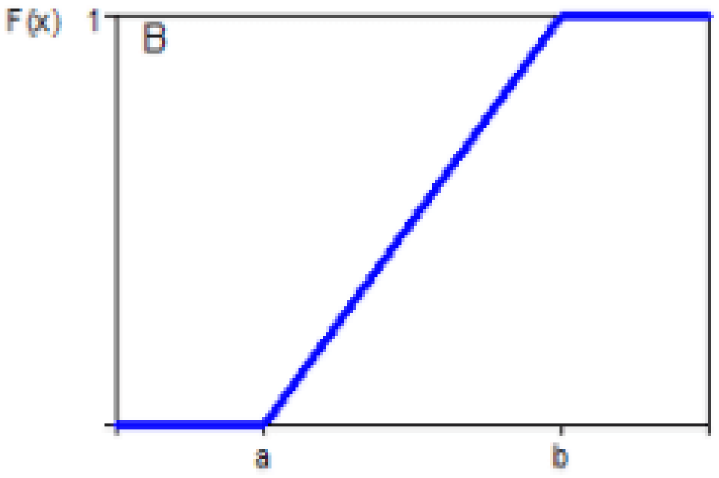
$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se \quad a \le X \le b \\ 0 & a < X \;\; ou \;\; X > b \end{cases}$$

$$média: \quad \mu = \frac{a+b}{2}$$

$$desvio\ padrão: \quad \sigma = \sqrt{\frac{(b\text{-}a)^2}{12}}$$

Gráficos





Notação: U(a,b)

A Distribuição Exponencial

- Distribuição contínua que é assimétrica à direita e se estende de zero até o infinito positivo;

- Amplamente utilizada na teoria das filas para modelar intervalo do tempo decorrido entre chegadas em processos, tais como:
  - clientes em caixas eletrônicos de bancos;
  - pacientes dando entrada em uma emergência de um hospital;
  - pesquisas em um endereço da internet.

fdp para a distribuição exponencial:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

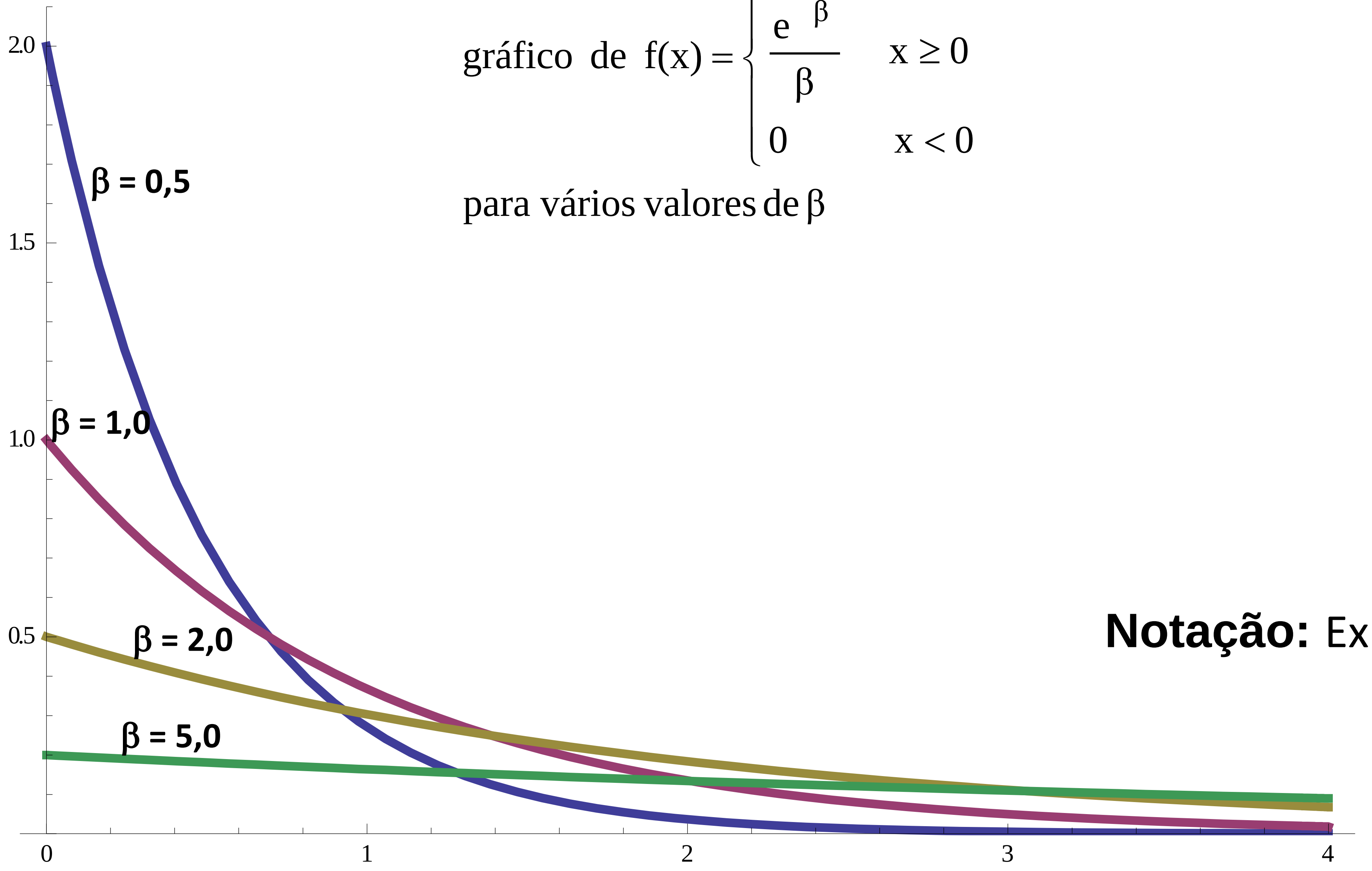
média: $\mu = \beta$

var*iância*: $\sigma^2 = \beta^2$

desvio padrão: $\sigma = \beta$

A probabilidade acumulada de zero até $X = x$: $P(x \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$

é área abaixo da curva desde 0 até *x*.



$$\text{gráfico de } f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

para vários valores de β

Notação: Exp$(1/\beta)$

Exemplo: Cerca de 15 clientes utilizam o caixa eletrônico por hora. Supondo que a distribuição de tempos de chegada é exponencial, qual é a probabilidade de que o tempo de chegada entre clientes consecutivos seja:

(a) Menor que três minutos?

(b) Maior que 3 minutos?

(c) Entre 2 e 4 minutos?

- A variável aleatória X = tempo

- Note que foi dada a frequência de chegada $\lambda = 1/\beta = 15$ /hora

- 3 min = 0,05 horas

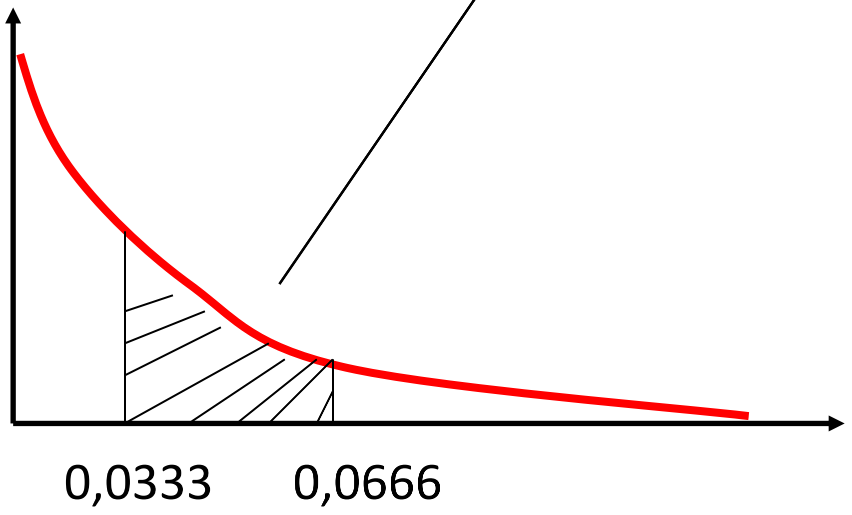
- 2 min = 0,0333 horas

-4 min = 0,0666 horas

(a) $P(t < 0,05) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-(15).(0,05)} = 0,5276$

(b) $P(t \geq 0,05) = 1 - P(t < 0,05) = 1 - 0,5276 = 0,4734$

(c) Área de 0,0333 até 0,0666= (área de 0 até 0,0666) – (área de 0 até 0,033)



$P(0,0333<t < 0,0666)= P(t<0,0666)- P(t<0,0333)= e^{-(15).(0,0666))} - e^{-(15).(0,0333))}$