Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom / /

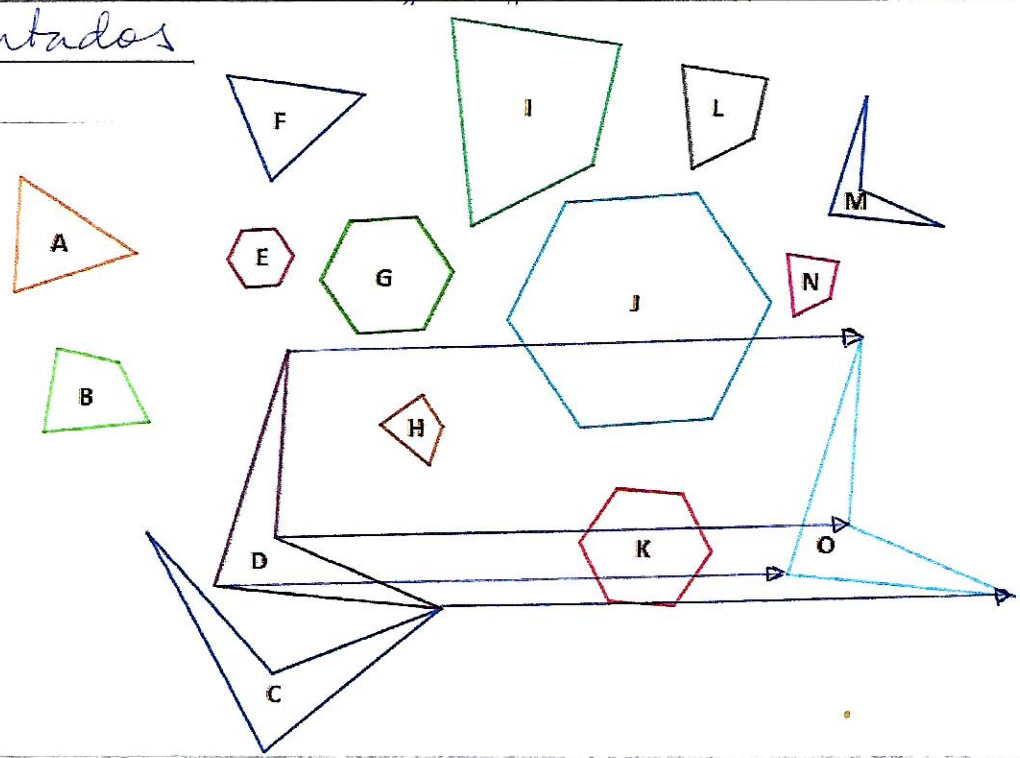
Memórias / Resumo
MAT0310 Geometria III 2023
Cláudia Cueva Candido

I) CONGRUÊNCIAS

Começamos com uma atividade de reconhecimento de figuras congruentes e associamos a congruência à ideia de sobreposição de figuras por meio de { translações, rotações, reflexões.

Essas são as aplicações do plano no plano que mantêm forma e tamanho.

Em particular, em uma atividade de análise, associamos translação a deslocamento sobre uma reta e ligamos vértices homólogos por meio de segmentos orientados



II) Translações : ideias iniciais

A partir dessa atividade observamos que em um deslocamento retilíneo, os pontos da figura original e da final ficam associados por segmentos orientados com:

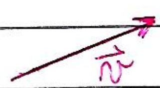
mesma direção
mesmo sentido
mesmo comprimento

} e aqui está a presença de um vetor !

Def.: A translação na direção de um vetor $\vec{v}$ é a aplicação do plano que associa a ponto P o ponto $P' = P + \vec{v}$. (soma de pt c/ vetor).

$P \xrightarrow{\vec{v}} P'$ Notação $T_{\vec{v}} P = P'$

Para trabalhar com a noção de soma de ponto com vetor precisamos de propriedades:



1) $P + \vec{O} = P$
2) $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$
3) $P + \vec{v} = P + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$
4) $P + \vec{v} = Q + \vec{v} \Rightarrow P = Q$

Se $\vec{v} = 0$: $T_{\vec{0}}(P) = P \ \forall P \ \therefore \ T_{\vec{0}} = Id$.

Mas... $T_{\vec{v}}$ mantém forma? e tamanho?
Leva reta em reta?
Precisamos de formalizações!

ISOMETRIAS

III) Transformações / Colineações / Isometrias

Uma transformação do plano é uma aplicação do plano no plano que é bijetora.

$\mathcal{F}$: conjunto das transformações

Composta:

$F, G \in \mathcal{F}$ $\quad (G \circ F)(P) := G(F(P))$.

Temos as propriedades:

1) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow G \circ F \in \mathcal{F}$

2) $F, G, H \in \mathcal{F} \Rightarrow (H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$

3) $\exists\, Id$ em $\mathcal{F}$: $F \circ Id = F$, $\forall F \in \mathcal{F}$.

4) $\forall F \in \mathcal{F}$, $\exists F^{-1} \in \mathcal{F} \,/\, F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = Id$.

$(\mathcal{F}, \circ)$: grupo de transformações do plano.

Def.: $\mathcal{G} \neq \emptyset$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ é subgrupo de $\mathcal{F}$ se:

i) $F, G \in \mathcal{G} \Rightarrow G \circ F \in \mathcal{G}$

ii) $F \in \mathcal{G} \Rightarrow F^{-1} \in \mathcal{G}$.

• As transformações que levam reta em reta são as colineações:

F é colineação $\Leftrightarrow$ { se r é reta então $F(r)$ é reta

Teo 2.1 O conj das colineações é subgrupo de $\mathcal{F}$: $(\mathcal{C}, \circ) \subset_{sg} (\mathcal{F}, \circ)$.

Uma isometria do plano é uma Transformação do plano que preserva distância.

$F \in \mathcal{F}$ $\quad F(P) = P'$ $\quad F(Q) = Q'$

F é isometria $\Leftrightarrow$ $P'Q' = PQ$.

Obs: Notação $\overline{PQ}$ é o segmento de extremos P e Q

$PQ = med(\overline{PQ})$.

Teo 2.2: O conjunto de todas as isometrias é subgrupo de $\mathcal{F}$

$(\mathcal{I}, \circ) \subset (\mathcal{F}, \circ)$.

Além de distância, uma isometria preserva forma!

Com algum trabalho provamos o:

Teo 2.3: Toda isometria do plano é uma colineação do plano que preserva ordem, pontos médios, segmentos, semirretas, triângulos, ângulos, medida de ângulos, perpendicularismo e paralelismo.

Até aqui temos:

$(\mathcal{I}, \circ) \underset{sg}{\subset} (\mathcal{C}, \circ) \underset{sg}{\subset} (\mathcal{F}, \circ)$.

? E as translações ?

III) Translações : Resultados importantes.

Definimos $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$.

Provamos que $T_{\vec{v}}$ é injetora e sobrejetora e que a composta comuta(!) E q $T_{\vec{v}}$ é isometria!

$$T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}+\vec{w}} = T_{\vec{w}+\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}}.$$

Prop 3.1: O conjunto $\mathcal{T}$ de todas as translações do plano é subgrupo abeliano do grupo das isometrias.

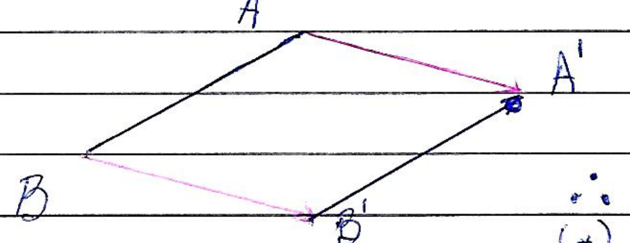
Provamos também:

Prop. 3.2 (E1 L2): Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, $T_{\vec{v}}$ não tem pontos fixos

Prop. 3.3: Dados pts A e B $\exists!$ translação $T_{\vec{v}}$ tal que $B = T_{\vec{v}} A$.

Prop. 3.4 (E2 L2): Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, uma translação $T_{\vec{v}}$ deixa invariantes as retas paralelas à direção de $\vec{v}$ e somente essas retas.

Daí... começamos a analisar o que acontece com um segmento $\overline{AB}$



$A' = A + \vec{v}$: $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$

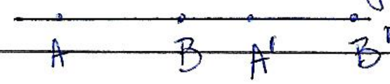
$B' = B + \vec{v}$: $\vec{v} = \overrightarrow{BB'}$

$\therefore$ $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$

(*) $A'B' = AB$

(#) **Prop. 3.5** $A \neq B$ $A' = T_{\vec{v}} A$ $B' = T_{\vec{v}} B$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\Longrightarrow$ o quadrilátero $ABB'A'$ é paralelogramo (eventualmente degenerado



).

ou seja: $\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ são paralelos e congruentes (c/ mm sentido)

Corolário 3.6 Se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ estão relacionados por translação, então eles são lados de um paralelogramo.

Corolário 3.7 r reta e $T_{\vec{v}}$ dados
r e $T_{\vec{v}}(r)$ são retas paralelas.

Prop 3.8 Dados segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ paralelos congruentes com mesmo sentido (de modo que $ABB'A'$ é paralelogramo (ev deg.)) então existe uma única translação $T_{\vec{v}}$ tq $\begin{cases} T_{\vec{v}} A = A' \\ T_{\vec{v}} B = B' \end{cases}$.

Prop. 3.10 Seja F uma transformação do plano tal que para todo par de pontos distintos o quadrilátero $PQQ'P'$ é paralelogramo (ev deg.) onde $P' = F(P)$ $Q' = F(Q)$
Então F é uma translação. //

Obs: Escrevemos $ABCD$ p/ denotar quadrilátero c/ vértices consecutivos A, B, C e D

Problema típico (Translações)

Dadas curvas r e s e segmento $\overline{MN}$
Encontrar segmento $\overline{AB}$, com $A \in r$ e $B \in s$, tal que $\overline{AB}$ seja paralelo e congruente a $\overline{MN}$.

Devemos ter $B \in s$ e sendo $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ devemos ter $\underbrace{B = T_{\vec{v}} A}_{B \in T_{\vec{v}} r}$ ou $\underbrace{B = {}^{+}T_{-\vec{v}} A}_{B \in T_{-\vec{v}} r}$, pois $A \in r$

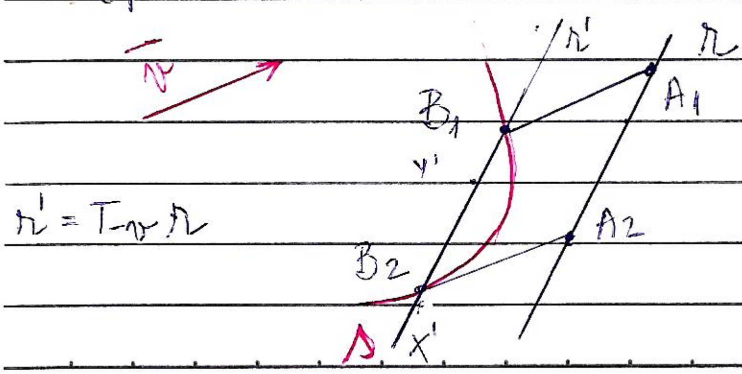
Logo, devemos ter $B \in s \cap T_{\vec{v}} r$ ou $B \in s \cap T_{-\vec{v}} r$
Na figura acima:
não há intersecção de s com $T_{\vec{v}} r$ (Verifique!)
Então procuramos $s \cap T_{-\vec{v}} r$.

(Observe que, neste caso, r é reta e p/ obter $T_{-\vec{v}} r$ marcamos 2 pts X e Y em r e depois $X' = X - \vec{v}$ e $Y - \vec{v} = Y'$
$\overleftrightarrow{X'Y'} = T_{-\vec{v}} r$)

Encontramos B_1 e B_2 e

depois: marcamos $A_1 = B_1 + \vec{v}$
$A_2 = B_2 + \vec{v}$.

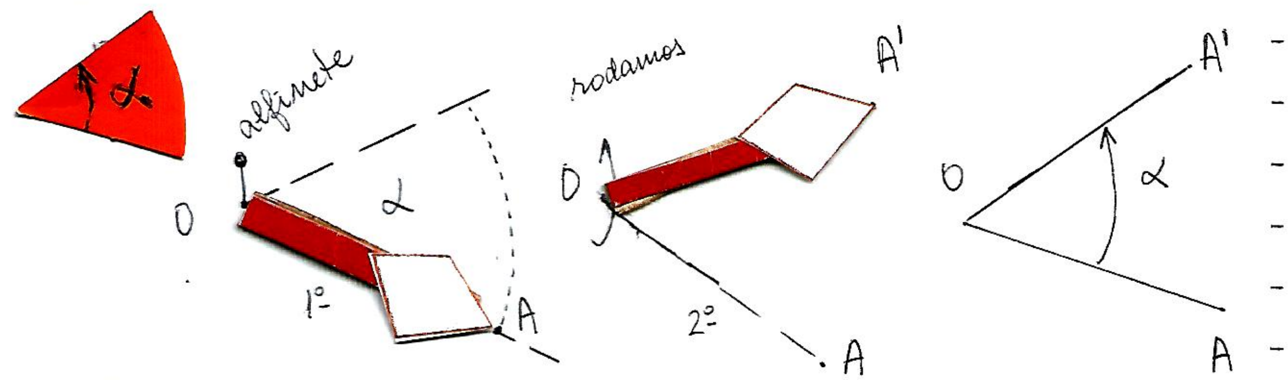
(pois $B_i = T_{-\vec{v}} A_i \Leftrightarrow A_i = T_{\vec{v}}\ i$)



Rotações do plano

$R_{O,\alpha}$: rotação de centro O e ângulo α.

A princípio, trabalhamos com artefatos (alfinete, haste à qual pregamos uma figura) para aplicar uma rotação de centro O e ângulo α a uma figura.
Como resultado dessa atividade chegamos à



! Definição de rotação de centro O e ângulo α !

$A' = R_{O,\alpha}(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} \measuredangle A\hat{O}A' = \alpha \text{ (ângulo orientado)} \\ OA' = OA \therefore A' \in \text{circunf de centro O e raio OA.} \end{cases}$

(Convenção $\alpha > 0$: sentido anti horário $\alpha < 0$: sentido horário.)

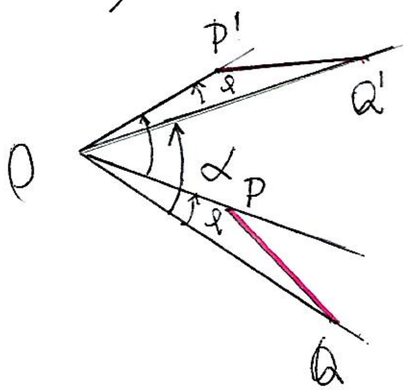
- $F = R_{O,\alpha}$ é transformação do plano

Dados α e O para cada ponto A, construímos a semirreta $\overrightarrow{OA}$ e $\exists$ uma única semirreta $\overrightarrow{OC}$ tal que $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \alpha$ isto é $\measuredangle A\hat{O}C = \alpha$.
Sendo $S(O, OA)$ a circunferência de centro O e raio OA existe um único ponto A' tq $A' \in \overrightarrow{OC}$ e $A' \in S(O, OA)$ $\therefore$ $R_{O,\alpha}$ é injetora.
Dado Q, encontramos $P = R_{O,-\alpha}(Q)$ $\therefore$ $R_{O,\alpha}$ é sobrejetora e mais $(R_{O,\alpha})^{-1} = R_{O,-\alpha}$

- $F = R_{O,\alpha}$ é isometria. Se $P' = R_{O,\alpha}(P)$ $Q' = R_{O,\alpha}(Q)$ então $P'Q' = PQ$.

Temos três casos para analisar:
i) O, P e P' não colineares ii) O-P-Q iii) P-O-Q.

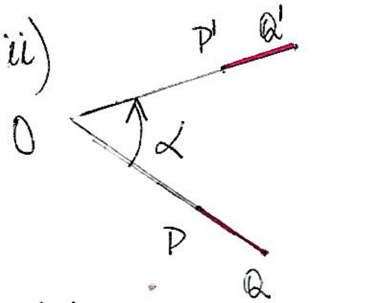
i) P, O e Q não colineares



$$\left.\begin{array}{l} OP' = OP \\ P'\hat{O}Q' \equiv P\hat{O}Q \\ OQ' = OQ \end{array}\right\} \text{LAL} \Rightarrow \Delta P'OQ' \equiv \Delta POQ$$

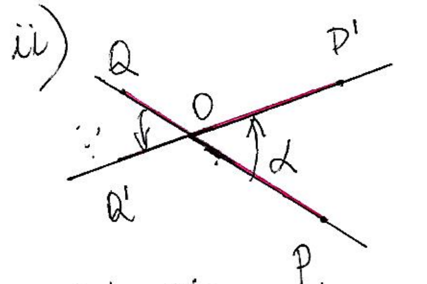
$$\Rightarrow P'Q' = PQ$$

ii)



$P'Q' = OQ' - OP'$
$= OQ - OP = PQ$

ii)



$P'Q' = P'O + OQ' =$
$= PO + OQ = PQ$

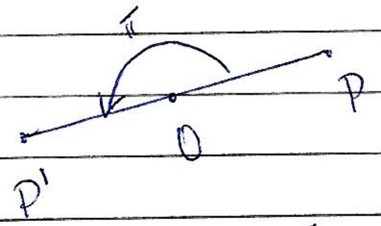
De i, ii, iii, segue que $R_{O,\alpha}$ é isometria

$$\left.\begin{array}{l} R_{O,\alpha} \text{ isometria} \\ \text{Seja } r \text{ reta} \end{array}\right\} \Rightarrow R_{O,\alpha}(r) \text{ é reta.}$$

Em particular

$\alpha = 0$: $R_{0,0}$ é a identidade.

$\alpha = \pi$: $P' = R_{O,\pi} P \Rightarrow P'$ é colinear com O e P.



$$\text{Temos } \left.\begin{array}{l} P' - O - P \\ OP' = OP \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

O é médio do segmento $\overline{PP'}$.

V Reflexão em relação a ponto M: R_M

$$P' = R_M P \overset{def}{\Longleftrightarrow} M \text{ é médio de } PP'$$

Observamos que $P' = R_M(P) \Leftrightarrow M$ é médio de $PP' \Longleftrightarrow P' - M - P$ com $MP' = MP \Longleftrightarrow P' = R_{M,\pi}(P)$.

Ou seja R_M é a rotação de centro M e ângulo π

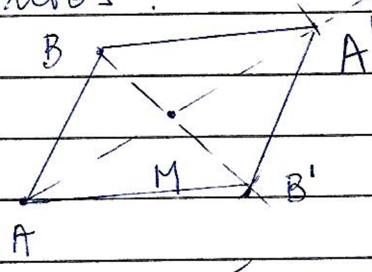
$$R_M = R_{M,\pi}.$$

Segue imediatamente, conforme já provado para rotações:

- R_M é transformação
- R_M é isometria

Vimos também:

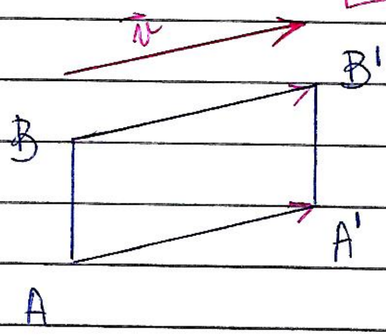
Ação de R_M sobre um par de pontos A e B distintos:

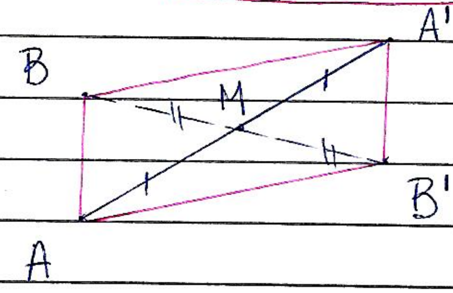


As diagonais $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ do quadrilátero $AB'A'B$ cortam-se em seus respectivos pontos médios $\xrightarrow[\text{triângulos}]{\text{congruência de}}$ $AB'A'B$ é um paralelogramo!

?! Opa! É o mesmo que aconteceu com translação? ?! Não!!!

Translação $T_{\vec{v}}$ versus Reflexão em relação a pt R_M





AA'B'B é paralelogramo:

$\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ são: paralelos, congruentes, c/ mesmo sentido

AB'A'B é paralelogramo

$\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ são: paralelos, congruentes, com sentidos opostos.

Na ação sobre um segmento $\overline{AB}$ a diferença entre $T_{\vec{v}}$ e R_M é o sentido da imagem $\overline{A'B'}$.