

Álgebra Linear e Aplicações

- *Matrizes de Householder e aplicações para a decomposição QR.*



MATRIZES DE HOUSEHOLDER

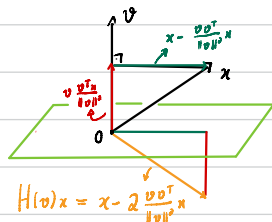
DEFINIÇÃO: DADO $v \in \mathbb{R}^n$, DEFINIMOS A MATRIZ $n \times n$ H_v POR $H_v = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} = I - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2}$

EXEMPLO: SEJA $v = (1, 2)$. LOGO $\|v\|^2 = 5$ E $vv^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

PORTANTO, $H_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA: DADO $v, x \in \mathbb{R}^n$, A PROJEÇÃO DE x NA RETA v É IGUAL A

$$\frac{v^T x}{v^T v} v = \frac{1}{\|v\|^2} v (v^T x) = \frac{1}{\|v\|^2} (vv^T) x = \frac{vv^T}{\|v\|^2} x.$$



O VETOR $x - \frac{vv^T}{\|v\|^2} x$ É PERPENDICULAR A v .

O VETOR $H_v x$ É A REFLEXÃO DE x EM RELAÇÃO A PLANO ORTOGONAL A v .

A INTERPRETAÇÃO FICA MAIS CLARA COM A PROPOSIÇÃO ABAIXO.

PROPOSIÇÃO 1 SEJA $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. LOGO

1) SE $x \perp v$, ENTÃO $H_v x = x$

2) SE $x = \lambda v$, ENTÃO $H_v x = -\lambda v$

DEMO: 1) $H_v(x) = (I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}) x = x - 2 \frac{\overset{=0}{v^T x}}{\|v\|^2} v = x$

2) $H_v(\lambda v) = (I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}) \lambda v = \lambda v - 2 \lambda \frac{v^T v}{\|v\|^2} v = \lambda v - 2 \lambda v = -\lambda v. \blacksquare$

EXEMPLO: $v = (1, 2)$

$$\text{SE } x = (-2, 1), \text{ ENTÃO } H_v x = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6-4}{5} \\ \frac{8-3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{SE } x = (2, 4), \text{ ENTÃO } H_v x = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6-16}{5} \\ \frac{-8-12}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

VAMOS AGORA VER ALGUMAS PROPRIEDADES DE H_v .

PROPOSIÇÃO 2: SEJAM $v, e \in \mathbb{R}^n$ e $\|e\|=1$. Logo

- 1) H_v É ORTOGONAL E SIMÉTRICA. EM PARTICULAR, $H_v^{-1} = H_v$. ($S_E v \neq 0$)
- 2) $H_{v+\|v\|e}(v) = -\|v\|e$ ($S_E v + \|v\|e \neq 0$)
- 3) $H_{v-\|v\|e}(v) = +\|v\|e$. ($S_E v - \|v\|e \neq 0$)

DEMO: 1) H_v É SIMÉTRICA

$$H_v^T = (I - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2})^T = I^T - 2 \frac{(vv^T)^T}{\|v\|^2} = I - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2} = H_v.$$

H_v É ORTOGONAL

$$H_v H_v = (I - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2}) (I - 2 \frac{vv^T}{\|v\|^2}) = I - 4 \frac{(vv^T)(vv^T)}{\|v\|^4} + 4 \frac{(vv^T)(vv^T)}{\|v\|^4} = I - 4 \frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4 \frac{vv^T}{\|v\|^2} = I.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad H_{v+\|v\|e}(v) &= v - 2 \frac{(v+\|v\|e)(v+\|v\|e)^T}{\|v+\|v\|e\|^2} v = v - 2 \frac{(v+\|v\|e)(v^T v + \|v\|e^T v)}{v^T v + 2\|v\|e^T v + \|v\|^2} = v - 2 \frac{(v+\|v\|e)(\|v\|^2 + \|v\|e^T v)}{2(\|v\|^2 + \|v\|e^T v)} \\ &= v - (v + \|v\|e) = -\|v\|e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad H_{v-\|v\|e}(v) &= v - 2 \frac{(v-\|v\|e)(v-\|v\|e)^T}{\|v-\|v\|e\|^2} v = v - 2 \frac{(v-\|v\|e)(v^T v - \|v\|e^T v)}{v^T v - 2\|v\|e^T v + \|v\|^2} = v - 2 \frac{(v-\|v\|e)(\|v\|^2 - \|v\|e^T v)}{2(\|v\|^2 - \|v\|e^T v)} \\ &= v - (v - \|v\|e) = +\|v\|e \end{aligned}$$

EXEMPLO: SEJA $v = (3, 4)$ e $e = (1, 0)$. Logo

$$w = v - \|v\|e = (3, 4) - 5(1, 0) = (-2, 4) \Rightarrow H_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{20} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } H_w(v) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9+16}{5} \\ \frac{12-12}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \|v\|e$$

IMPLICA $\begin{bmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{bmatrix} = \underbrace{H_{v, \|v\|}}_{\in Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}}_{\in R} \Rightarrow \text{DECOMPOSIÇÃO QR!}$

USANDO O EXEMPLO ACIMA, VEMOS QUE $H_{v, \|v\|} \begin{bmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{v, \|v\|} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} & H_{v, \|v\|} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$

DADO $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ COM COLUMNS L.I.'s, COMO ACHAR A DECOMPOSIÇÃO QR USANDO AS MATRIZES ANTERIORES? COMEÇAMOS COM EXEMPLOS

EXEMPLO 1 SEJA $A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, $\{v_1, \dots, v_4\}$ L.I.'s

1º PASSO: SEJA $H_1 := H_{v_1, \|v_1\|}$ (PODERÍAMOS USAR $v_1 + \|v_1\|e$ TAMBÉM). LOGO

$\hookrightarrow e = (1, 0, 0, 0)$

$\hookrightarrow$ SE $v_1 + \|v_1\|e = 0$, USAMOS $v_1 - \|v_1\|e$. O MESMO OCORRE NOS PASSOS ABAIXO

$$H_1 A = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ H_1 v_1 & H_1 v_2 & H_1 v_3 & H_1 v_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\| & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & | & | & | \\ 0 & v_2^{(2)} & v_3^{(2)} & v_4^{(2)} \\ 0 & | & | & | \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ VETORES EM $\mathbb{R}^3$

2º PASSO: SEJA $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & | & | & | \\ 0 & H_{v_2^{(2)}, \|v_2^{(2)}\|} e & | & | \\ 0 & | & | & | \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow e \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow e = (1, 0, 0)$

LOGO $H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \|v_1\| & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & \|v_2^{(2)}\| & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & | & | \\ 0 & 0 & v_3^{(3)} & v_4^{(3)} \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow$ VETORES EM $\mathbb{R}^2$

3º PASSO: SEJA $H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & | \\ 0 & 0 & H_{v_3^{(3)}, \|v_3^{(3)}\|} e & | \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow e \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow e = (1, 0)$

$$\text{Logo } H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \|v_1\| & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & \|v_2^{(1)}\| & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & \|v_3^{(1)}\| & a_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} := R$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^T & 0 \\ 0 & H_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} I^T & 0 \\ 0 & H_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H_0 \end{bmatrix}$$

→ TRIANGULAR SUPERIOR.

$$\text{CONCLUSÃO: } H_3 H_2 H_1 A = R \Rightarrow A = H_1^{-1} H_2^{-1} H_3^{-1} R = \underbrace{H_1 H_2 H_3}_{=: Q} R = QR$$

Q É ORTOGONAL, POIS H_1, H_2 E H_3 SÃO.

EXEMPLO 2: SEJA $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R})$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ L.I.'s

USANDO OS MESMOS H_1, H_2 E H_3 OBTENEMOS

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \|v_1\| & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & \|v_2^{(1)}\| & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & \|v_3^{(1)}\| \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} := R. \text{ Logo } A = QR, \text{ EM QUE } Q = H_1 H_2 H_3.$$

RECORDAÇÃO: VIMOS QUE SE $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ TEM COLUNAS L.I.'s ENTÃO TEMOS 2 TIPOS DE DECOMPOSIÇÃO QR (QUE COINCIDEM SE $m=n$)

1. REDUZIDA: $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ m_1 & \dots & m_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}}_{=: R \in M_{n,n}(\mathbb{R})}$

USANDO MATRIZES DE HOUSEHOLDER, CALCULAMOS A TOTAL

2. TOTAL: $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ m_1 & \dots & m_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=: Q \in M_{m,m}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}}_{=: R \in M_{n,n}(\mathbb{R})}$

APLICAÇÃO: DECOMPOSIÇÃO QR (CASO GERAL)

NOSSO OBJETIVO AGORA É CONSTRUIR MATRIZES $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ^{ORTOGONAL} E $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ^{TRIANGULAR SUPERIOR} TAIS QUE $A = QR$ USANDO MATRIZES DE HOUSEHOLDER.

LEMA 1: SEJA $A = [v_1 | \dots | v_n]$ UMA MATRIZ $m \times n$. LOGO $H_{v_i = \|v_i\| e_i} A = \begin{bmatrix} \mp \|v_i\| & & \\ 0 & \tilde{v}_2 & \\ \vdots & & \tilde{v}_n \\ 0 & & \end{bmatrix}$, EM QUE $e_i = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

DEMO: BASTA OBSERVAR QUE SE $B = H_{v_i = \|v_i\| e_i}$, ENTÃO

$$BA = \begin{bmatrix} Bv_1 & Bv_2 & \dots & Bv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mp \|v_i\| & & & \\ 0 & \tilde{v}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{v}_n \end{bmatrix}$$

LEMA 2: SEJA $A = \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & V \end{bmatrix}$, EM QUE $C \in M_{p,p}$, $D \in M_{p,m-p}$, $V = [v_1 | \dots | v_{m-p}]$, EM QUE $v_1, \dots, v_{m-p} \in \mathbb{R}^{m-p}$.

SE $B = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & H_{v_i = \|v_i\| e_i} \end{bmatrix}$, $e_i = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-p}$, ENTÃO $BA = \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & \tilde{V} \end{bmatrix}$, EM QUE $\tilde{V} = \begin{bmatrix} \mp \|v_i\| & & \\ 0 & \tilde{v}_2 & \\ \vdots & & \tilde{v}_{m-p} \\ 0 & & \end{bmatrix}$.
É UMA MATRIZ $m-p$ POR $n-p$.

DEMO: $BA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & HV \end{bmatrix}$. AGORA BASTA USAR O LEMA 1 NO TERMO HV .
 $\hookrightarrow H_{v_i = \|v_i\| e_i}$

EXEMPLO: SEJA $A = \begin{bmatrix} \overset{C}{1} & \overset{D}{1} & \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}_{H_{v_i = \|v_i\| e_i}} & \\ 0 & & \end{bmatrix}$ $\rightarrow H$
 $\downarrow$
 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Logo } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{C}{1} & \overset{D}{1} & 1 \\ 0 & 5 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \tilde{V}$

ALGORITMO PARA DECOMPOSIÇÃO QR:

SEJA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$, EM QUE $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ É L.I.

PASSO 1 SEJA $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. APLICAMOS $H_1 = H_{v_1 + \|v_1\|e_1}$ E OBTENEMOS

$$H_1 A = \begin{bmatrix} \frac{\|v_1\|}{\|v_1\|} & | & | \\ 0 & | & | \\ \vdots & | & | \\ 0 & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \tilde{v}_1 \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} \quad \text{PELO LEMA 1}$$

PASSO 2 SEJA $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-1}$. APLICAMOS $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & O_{1,m-1} \\ & H_{\tilde{v}_2 + \|\tilde{v}_2\|e_1} \end{bmatrix}$ A $H_1 A$, EM QUE

$\tilde{v}_2 = (\tilde{v}_{12}, \tilde{v}_{22}, \dots, \tilde{v}_{m2})$ FOI OBTIDO DE $H_1 A$ E $\tilde{v}_2 = (\tilde{v}_{12}, \dots, \tilde{v}_{m2}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. NOTE QUE $\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{12} \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^{m-1}$

ASSIM, $H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \frac{\|v_1\|}{\|v_1\|} & \tilde{v}_{12} & | & | \\ 0 & \frac{\|v_2\|}{\|v_2\|} & | & | \\ \vdots & 0 & | & | \\ 0 & 0 & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \tilde{v}_1 \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} \quad \text{PELO LEMA 2.}$

PASSO k APÓS $k-1$ PASSOS, TEMOS $H_{k-1} H_{k-2} \dots H_1 A = \begin{bmatrix} R_k & | & | & | \\ 0 & | & | & | \end{bmatrix}$, EM QUE $R_k \in M_{k,k}$ É TRIANGULAR

SUPERIOR. E $w_k, \dots, w_n \in \mathbb{R}^m$. SEJA $w_k = (w_{k1}, \dots, w_{k,k-1}, w_{kk}, \dots, w_{mk}) = (w_{k1} \dots w_{k,k-1} \bar{w})$, $\bar{w} = (w_{kk}, \dots, w_{mk})$.

DEFINIMOS $H_k = \begin{bmatrix} I_{k-1,k-1} & 0 \\ 0 & H_{\bar{w} + \|\bar{w}\|e_1} \end{bmatrix}$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m-k+1}$, E CONCLUÍMOS QUE

$\hookrightarrow (m-k+1) \times (m-k+1)$

$$\begin{bmatrix} I_{k-1,k-1} & 0 \\ 0 & H_{\tilde{w} = \|w\|e_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{k-1} & | & w_k & | & w_n \\ 0 & | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{k-1} & | & w_k & | & w_n \\ 0 & | & \begin{matrix} w_{k+1} \\ w_{k+2} \\ \vdots \\ w_{n,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & | & \begin{matrix} \tilde{w}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_n \end{matrix} \end{bmatrix}$$

A matriz $R_k = \begin{bmatrix} R_{k-1} & \begin{matrix} w_k \\ w_{k+1} \\ \vdots \\ w_{n,k} \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} \tilde{w}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_n \end{matrix} \end{bmatrix} \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ É TRIANGULAR SUPERIOR. BASTA AGORA CONTINUAR O PROCESSO.

COMO $m \geq n$, APÓS n PASSOS, TEMOS

$$H_n H_{n-1} \dots H_1 A = R_n$$

USANDO $H_j^{-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ORTOGONAL}}}{=} H_j^T \underset{\substack{\downarrow \\ \text{SIMÉTRICA (PROPOSIÇÃO 2)}}}{=} H_j$, CONCLUÍMOS QUE $A = \underbrace{H_1 H_2 \dots H_n}_{:= Q} \underbrace{R_n}_{:= R}$

LOGO $A = QR$, EM QUE R É TRIANGULAR SUPERIOR E Q É PRODUTO DE ORTOGONAIS. LOGO É ORTOGONAL.

$$\hookrightarrow R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_{nn} \\ & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$