Gabarito da Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I – Módulo 1

Exercício 1 *(F) Os irracionais correspondem a dízimas não periódicas.*

(V) Por absurdo com $x \neq 0$.

(F) Para $z = 0 \in \mathbb{N}$.

(F) Para $z = -1$.

(F) Temos $\sqrt{x^2} = |x|$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(V) Por definição, $\begin{cases} |x-y| = x-y & \text{se } x-y > 0, \text{ que é, } x > y. \\ |x-y| = y-x & \text{se } x-y < 0, \text{ que é, } x < y. \end{cases}$

(F) Note que para números de mesmo sinal, $x < 0$ *e* $y < 0$ *ou* $x > 0$ *e* $y > 0$, *essa afirmação é verdadeira:*

se $x > 0$ *e* $y > 0$ *temos que* $x + y > 0$ *assim,* $|x+y| = (x+y) = x+y = (x)+(y) = |x|+|y|$
se $x < 0$ *e* $y < 0$ *temos que* $x + y < 0$ *assim,* $|x+y| = -(x+y) = -(x)+-(y) = |x|+|y|$.

Porém, para números de sinal contrario, $x < 0$ *e* $y > 0$ *ou* $x > 0$ *e* $y < 0$, *essa afirmação não ocorre:*

$$\begin{aligned}
&\text{se } x > 0 \text{ e } y < 0\text{: } \text{se } x+y > 0\text{: } |x+y| = (x+y) \neq (x)-(y) = |x|+|y| \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \text{se } x+y < 0\text{: } |x+y| = -(x+y) \neq (x)-(y) = |x|+|y| \\
&\text{se } x < 0 \text{ e } y > 0\text{: } \text{se } x+y > 0\text{: } |x+y| = (x+y) \neq -(x)+(y) = |x|+|y| \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \text{se } x+y < 0\text{: } |x+y| = -(x+y) \neq -(x)+(y) = |x|+|y|
\end{aligned}$$

Exemplo disso é a dupla $x = -3$ *e* $y = 1$, *onde* $|-3+1| = |-2| = 2 \neq 4 = 3+1 = |-3|+|1|$.

(F) Note que $a = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$ *e* $b = 1 - \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, *então* $a + b \in \mathbb{Q}$.

(F) Para $a = b = \sqrt{2} \in \mathbb{I}$, *temos* $a.b \in \mathbb{Q}$.

(V) Sejam $a = \frac{m}{n}$ *e* $b = \frac{k}{l}$ *com* $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, *então*

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl} \in \mathbb{Q}.$$

Já que $ml + kn \in \mathbb{Z}$.

(V) Analogamente ao anterior sejam $a = \frac{m}{n}$ *e* $b = \frac{k}{l}$ *com* $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$, *então*

$$a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl} \in \mathbb{Q}.$$

Já que mk *e* $nl \in \mathbb{Z}$.

(V) Sejam $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *e* $b \in \mathbb{I}$, *suponha* $a + b \in \mathbb{Q}$. *Então*

$$a + b = \frac{l}{k} = b + \frac{m}{n} \Rightarrow b = \frac{ln - mk}{nk} \in \mathbb{Q}$$

Já que $(ln - km), nk \in \mathbb{Z}$. *O que é um absurdo, pois* $b \in \mathbb{I}$.

(F) Sejam $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *e* $b \in \mathbb{I}$, *suponha* $a \cdot b \in \mathbb{Q}$. *Então*

$$a \cdot b = \frac{l}{k} = b \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow b = \frac{ln}{mk} \in \mathbb{Q}$$

Já que ln *e* $mk \in \mathbb{Z}$. *O que é um absurdo, pois* $b \in \mathbb{I}$.
(V) $n = a \cdot b$, $a \in \mathbb{Q}$ *e* $b \in \mathbb{I}$, *como mostrado pelo resultado anterior* $n \notin \mathbb{Q}$ *mas* $n \in \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{Q}^C = \mathbb{I} \therefore n \in \mathbb{I}$

(V) Se (a, b) *pertencem à reta com coeficiente angular* $\frac{3}{2}$, *existe uma constante* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\frac{3a}{2} + c = b$, *donde* $c = b - \frac{3a}{2}$. *Então note que,*

$$\frac{(a+2)3}{2} + c = \frac{3a+6}{2} + \frac{2b - 3a}{2} = \frac{2b+6}{2} = b + 3.$$

Portanto $(a + 2, b + 3)$ *pertence à reta.*

(V) Se duas retas são perpendiculares e nenhuma delas é paralela ao eixo Oy, *então o produto de seus coeficientes angulares é* -1. *Como nenhuma delas é paralela ao eixo* y, *então o seu ângulo* θ *com o eixo* x *está em* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *e não é nulo, logo, o seu coeficiente angular é* $tg(\theta) \neq 0$. *Assim, o coeficiente angular da outra reta é*

$$tg(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{sen(\frac{\pi}{2} + \theta)}{cos(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{sen(\frac{\pi}{2})cos(\theta) + sen(\theta)cos(\frac{\pi}{2})}{cos(\frac{\pi}{2})cos(\theta) - sen(\frac{\pi}{2})sen(\theta)} = -\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = -\frac{1}{tg(\theta)}.$$

Logo, o produto dos seus coeficientes angulares é -1.

(F) Duas retas são paralelas se possuem o mesmo coeficiente angular. Note que se $(1, -1)$ *e* $(2, 2)$ *pertencem a reta* $R : y = ax + b$ *então temos* $a.1 + b = -1$ *e* $a.2 + b = 2$ *donde* $a = 3$ *e* $b = -4$ *que possuem coeficiente angular* 3, *enquanto a reta* $S : x - 7 = 3y$,

ou seja, $S : \frac{x-7}{3} = y$ *possui coeficiente angular* $\frac{1}{3}$.

(F) Note que $(-x)^2+1 = x^2+1$ *logo a representação geométrica do gráfico da parábola* $y = x^2 + 1$ *é simétrica com relação ao eixo* Oy.

(V) Observe que os pontos do gráfico da equação $y^2 - x^2 = 1$ *satisfazem* $y^2 = x^2 + 1$. *Assim se* (a, b) *são tais que* $b^2 = a^2 + 1$ *temos também que* $(-b)^2 = (-a)^2 + 1$, *logo o ponto* $(-a.-b)$ *também pertence ao gráfico da equação* $y^2-x^2 = 1$ *sendo assim simétrico a reta* $y = x$.

(V) É uma parábola com concavidade para cima e sem raízes reais.

(F) Dividindo a equação por 2 temos $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, *ou seja,* $\left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. *Como* $\sqrt{2} > 1$ *seu maior eixo é na vertical.*

(V) O vértice é dado por $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$, *assim para* $y = 2 - x^2$ *o vértice é* $(\frac{0}{-2}, \frac{-8}{-4}) = (0, 2)$.

(V) Devemos ter que $\frac{x}{2-x} > 0$ *e* $2-x \neq 0$. *Assim* $x \neq 2$ *e* $\frac{x}{2-x} > 0$ *quando numerador e denominador possuem o mesmo sinal,* $2-x \geq 0$ *quando* $x \leq 2$, *logo* $\frac{x}{2-x} > 0$ *no intervalo* $[0, 2]$ *como* $x \neq 2$ *o domínio da função é o intervalo* $[0, 2)$.

(V) A imagem da função $h(x) = x^2$ *é o conjunto* $[0, +\infty)$, *assim a imagem de* $g(x) = -x^2$ *é o intervalo* $(-\infty, 0]$ *donde segue que a imagem de* $f(x) = 4 - x^2$ *é o subconjunto* $(-\infty, 4]$.

(V) Note que $x^2 + y^2 = 1$ *equivale a* $y^2 = 1 - x^2$, *ou seja,* $|y| = \sqrt{1 - x^2}$, *como* $y \geq 0$ *temos* $y = \sqrt{1 - x^2}$. *Portanto é o gráfico de uma função em* x.

(V) A imagem da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ *é a imagem da função* $\text{tg}(x)$ *que é toda a reta.*

(F) A função $g(x) = \text{sen}(x)$ *assume valores no intervalo* $[-1, 1]$, *em particular,* $-1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1$, *ou seja, a equação* $\text{sen}(2x) = 2$ *não é satisfeita para nenhum valor de* x.

(V) Note que $[\text{sen}(x) + \cos(x)]^2 - 1 = \text{sen}^2 x + 2\text{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) - 1 =$
$= 1 + 2\text{sen}(x)\cos(x) - 1 = 2\text{sen}(x)\cos(x) = \text{sen}(2x)$.

(F) $\sqrt{4} = 2$, *já que* $f(x) = \sqrt{x}$ *é uma função e não pode ter 2 respostas. (Ver defini-*

ção de função.) Então $\sqrt{x} \geq 0$ *para todo* x *por convenção, apesar de* $(-2)^2 = 4$.

(F) $\sqrt{9+16} = 5 \neq 7 = \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

(F) Para que isso seja verdade $\frac{AB}{C} = \frac{AB}{C^2} = \frac{A}{C}\frac{B}{C}$ *implica que* $C = C^2 \longrightarrow 1 = C$, *e portanto isso é apenas verdade se* $C = 1$. *Porém, com outros valores de* C *essa afirmação é falsa, como para* $A = 1$ *e* $B = C = 2$ *com os quais temos* $\frac{AB}{C} = 1 \neq \frac{1}{2} = \frac{A}{C}\frac{B}{C}$.

(F) Para que isso seja verdade $\frac{A}{B+C} = \frac{AC+AB}{BC} = \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$ *implica que* $A = AC + AB \longrightarrow 1 = C + B$ *e* $B + C = BC$, *e portanto isso é apenas verdade se* $BC = 1 \longrightarrow C = \frac{1}{B} \longrightarrow 1 = B + \frac{1}{B} = \frac{B^2+1}{B} \longrightarrow B = B^2 + 1$ *que é uma equação do segundo grau com* $\Delta = -3$, *e que portanto não tem solução nos reais. Isso revela que não há valores para* B *e* $C \in \mathbb{R}$ *em que tal afirmação seja verdadeira.*

(V) A função $y = x^2$ *intercepta a função* $y = 4$ *quando os valores dos* y *forem iguais, portanto no instante em que* $4 = x^2$ *que apenas ocorre em* $x = \sqrt{4} = \pm 2$.

Exercício 2 *Racional uma vez que,*

$$x = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{-1} + 2\sqrt{2} = -3.$$

Exercício 3 *Sejam* a, b *as partes do segmento, com* $a < b$. *Então*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow a^2 + ab = b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Resolvendo pela Fórmula de Bháskara, vem

$$\frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e como $a, b > 0$, *então*

$$\frac{a}{b} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

que é um número irracional. Então $a = xb$. *Agora como* $l = a + b$, *vem*

$$l = a + b = x \cdot b + b = (1+x)b = (1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2})b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b = \phi \cdot b$$

Se l *é racional, como* ϕ *é irracional, vem* b *irracional. Agora fazendo o argumento análogo com* $b = \frac{1}{x}a$, *vem* $l = (1 + \frac{1}{x})a$, *concluíndo que* a *é irracional.*

Agora se l *é irracional, nada podemos concluir, pois de* $l = \phi b$, *como* ϕ *é irracional,* b *pode ser tanto racional quanto irracional.*

Exercício 4 *(a) Observe que* $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ *e uma vez que* $y \geq x \geq 0$ *temos* $x + y \geq 0$ *e* $y - x \geq 0$ *donde vem* $(y-x)(y+x) \geq 0$*, ou seja,* $y^2 - x^2 \geq 0$*, isto é,* $y^2 \geq x^2$.

(b) Basta tomar $x = -5$ *e* $y = 1$*, temos* $y \geq x$ *entretanto* $x^2 = 25 \geq 1 = y^2$.

(c) Note que para $x = 0$ *e* $y = 0$*, vale* $\sqrt{x} = 0 = \sqrt{y}$*. Suponhamos que* $x > 0$ *ou* $y > 0$*. Mostrar* $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ *é equivalente à provar que* $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$*. Temos que*

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \geq 0,$$

pois $y - x \geq 0$ *e* $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$.

Exercício 5 *Note que*

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + yx + x^2).$$

Agora note que

$$y^2 + yx + x^2 = y^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + x^2 = \left(y + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0.$$

Logo,

$$x^3 < y^3 \Leftrightarrow y^3 - x^3 > 0 \Leftrightarrow (y-x)(y^2 + yx + x^2) > 0 \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow x < y.$$

Exercício 6 *Como* $a \in (0,1)$*, escolha* $r = \min\{a, 1-a\} > 0$*. Mostremos que* $(a-r, a+r) \subseteq (0,1)$*. Tome* $x \in (a-r, a+r)$*. Como* $r \leq a, 1-a$*, temos*

$$x > a - r \geq a - a = 0,$$

e

$$x < a + r \leq a + (1-a) = 1,$$

logo, $x \in (0,1)$.

Exercício 7 *Mostrar que* $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *é equivalente à provar que* $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$*. Temos que*

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|.$$

E para a outra desigualdade, temos

$$|b| = |(b-a) + a| \leq |b-a| + |a| = |a-b| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a-b| \Rightarrow -|a-b| \leq |a| - |b|.$$

Portanto, $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$.

Exercício 8 *Para* $a = 1$ *e* $b = -3$ *temos* $|a+b| = |1 + (-3)| = |-2| = 2 < 1 + 3 = 4$.

A não-coincidência ocorre quando os números tem sinais opostos. Assim, remete-se à Relação Triangular:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Exercício 9 $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right| = 3 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+1} = \pm 3$. *Logo,*

$\dfrac{2x-1}{x+1} = -3 \Leftrightarrow x = -2/5$ *ou* $\dfrac{2x-1}{x+1} = 3 \Leftrightarrow x = -4$.

Portanto, $x = \dfrac{-2}{5}$ *ou* $x = -4$.

Exercício 10 $|x+3| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 4|x+3| < 4\dfrac{1}{2} \Rightarrow |4||x+3| < 2 \Rightarrow |4x+12| < 2 \Rightarrow |(4x+12)+1| \leq |4x+12|+1 < 3$.

Exercício 11 *(a)* $|1-3x| < 5$

I. $1-3x < 5 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > \dfrac{-4}{3}$

II. $-(1-3x) < 5 \Rightarrow 3x-1 < 5 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$

$$S = \left(\frac{-4}{3}, 2\right).$$

(b) $|x^2+3| > 3$

I. $x^2+3 > 3 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ *ou* $x < 0$

II. $-(x^2+3) > 3 \Rightarrow -x^2 > 6 \Rightarrow x^2 < -6 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

$$S = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

(c) $x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3$

I. $x < 3$

II. $-x < 3 \Rightarrow x > -3$

$$S = (-3, 3).$$

(d) $x^2 > -1 \Rightarrow x^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$S = (-\infty, \infty).$$

(e) $x^2 < 6x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$

Encontrando-se as raízes da função quadrática à esquerda da inequação ($x = 1$ *e* $x = 5$*) e percebendo que a concavidade é para cima, conclui-se que a função tem imagem negativa para os valores do domínio entre as raízes. Assim,*

$$S = (1, 5).$$

(f) $x^3 > 27 \Rightarrow x > 3$

$$S = (3, \infty).$$

(g) $\dfrac{x-6}{x+2} \geq 0$

I. $(x-6 \geq 0)$ *e* $(x+2 > 0)$
$(x \geq 6)$ *e* $(x > -2) \Rightarrow x \geq 6$

II. $(x-6 \leq 0)$ *e* $(x+2 < 0)$
$(x \leq 6)$ *e* $(x < -2) \Rightarrow x < -2$

$$S = (-\infty, -2) \cup [6, \infty).$$

(h) $\dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x^2+1)} < 0$

I. $(x+2)(x-3) > 0$ *e* $x(x^2+1) < 0$
$((x < -2)$ *ou* $(x > 3))$ *e* $(x < 0)$
$x < -2$

II. $(x+2)(x-3) < 0$ *e* $x(x^2+1) > 0$
$(-2 < x < 3)$ *e* $(x > 0)$
$0 < x < 3$

A solução será dada pela união do conjunto resultante em I com o conjunto resultante em II. Assim,

$$S = (-\infty, -2) \cup (0, 3).$$

(i) $\dfrac{8}{x} < x - 2$ $(x \neq 0)$

Se $x > 0 \Rightarrow 8 < x^2 - 2x$
$x^2 - 2x - 8 > 0$ *e* $x > 0$.

As raízes da função quadrática são $x = -2$ *e* $x = 4$, *como a concavidade é para cima, os valores do domínio para os quais a função tem imagem positiva devem estar à esquerda da menor raiz ou a direita da maior raiz. Para que a condição* $x > 0$ *também seja satisfeita, a solução para esse caso é:*
$x > 4$.

Se $x < 0 \Rightarrow 8 > x^2 - 2x$
$x^2 - 2x - 8 < 0$ *e* $x < 0$.

Analogamente ao primeiro caso, para esse procuraremos pelos valores do domínio para os quais a imagem da função é negativa. Dada a concavidade para cima, esses valores devem estar entre as raízes. Para que a condição $x < 0$ *também seja satisfeita, a solução para esse caso é:*
$-2 < x < 0$.

Unindo as duas soluções, teremos:

$$S = (-2, 0) \cup (4, \infty).$$

(j) $\dfrac{3}{x-2} < \dfrac{1}{2x+1}$

Se $(x-2)$ *e* $(2x+1)$ *têm mesmo sinal, ou seja:* $x > 2$ *para ambas positivas ou* $x < -1/2$ *para ambas negativas, teremos:* $3(2x+1) < (x-2) \Rightarrow 5x < -5 \Rightarrow x < -1$.

Para que as condições de mesmo sinal sejam também satisfeitas, temos que a solução para esse caso é: $x < -1$.

Se $(x-2)$ *e* $(2x+1)$ *têm sinais opostos, ou seja:* $-1/2 < x < 2$, *teremos:* $6x+3 > x-2 \Rightarrow 5x > -5 \Rightarrow x > -1$.

Para que as condições de sinais opostos também sejam satisfeitas, temos que a solução para esse caso é: $-1/2 < x < 2$.

Unindo as duas soluções, teremos:

$$S = \ (-\infty, -1) \ \cup \ (-1/2, 2).$$

(k) $\dfrac{x^2}{x-2} - 1 \geq \dfrac{x^2+3}{x^2-4} \Rightarrow \dfrac{x^2-(x-2)}{x-2} \geq \dfrac{x^2+3}{(x-2)(x+2)}$ *(*$x \neq 2$ *e* $x \neq -2$*).*

Se $(x-2)$ *e* $(x+2)(x-2)$ *têm mesmo sinal, ou seja:* $x > 2$ *para ambas positivas ou* $x < -2$ *para ambas negativas, teremos:* $(x^2-x+2)(x-2)(x+2) \geq (x^2+3)(x-2)$. *Como* $x \neq 2$, *pode-se dividir ambos os lados da inequação por* $(x-2)$,

$$(x^2-x+2)(x+2) \geq x^2+3 \Rightarrow x^3 \geq -1 \Rightarrow x \geq -1.$$

Para satisfazer as condições de mesmo sinal, temos que a solução para esse caso é: $x > 2$.

Se $(x-2)$ *e* $(x+2)(x-2)$ *têm sinais opostos, ou seja:* $-2 < x < 2$, *teremos:* $x \leq -1$ *(Pois a resolução é a mesma do caso acima, basta inverter o sinal da inequação).*

Para satisfazer as condições de sinais opostos, temos: $-2 < x \leq -1$.

Unindo-se as soluções dos dois casos, teremos:

$$S = \ (-2, -1] \ \cup \ (2, \infty).$$

(l) $x^2 + 2x + 2 > 0$

A função não tem raiz, portanto é positiva para qualquer x real,

$$S = \ (-\infty, \infty).$$

(m) *A função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ *tem domínio* $\mathrm{Dom}(f) = (3, +\infty)$.

Exercício 12 *Sabemos que a equação da reta é* $y = \alpha x + \beta$*. Como a reta* r *que queremos encontrar é paralela a* $x + 2y = 6$ *(*$\Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 3$*), temos que* $\alpha = -1/2$*.*

Agora, como r *passa por* $(1, -6)$*,* $-6 = -\dfrac{1}{2} \cdot 1 + \beta$*. Portanto,* $\beta = -11/2$ *e* $r : y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{11}{2}$*.*

Exercício 13 *Note que os pontos* $(2, 5)$ *e* $(7, 8)$ *pertencem à reta* $r_1 : 3x - 5y + 19 = 0$ *e considere* $v_1 = (7, 8) - (2, 5) = (5, 3)$*.*

Analogamente, os pontos $(-1, 10)$ *e* $(5, 0)$ *pertencem à reta* $r_2 : 10x + 6y - 50 = 0$*. Considere,* $v_2 = (-1, 10) - (5, 0) = (-6, 10)$*.*

Como $v_1 \cdot v_2 = (5, 3) \cdot (-6, 10) = -30 + 30 = 0$*, temos que* r_1 *e* r_2 *são perpendiculares.*

Agora, lembre que o ponto de interseção deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} y = 3/5x + 19/5 \\ y = -10/6x + 50/6, \end{cases}$$

isto é, $(x, y) \in r_1 \cap r_2$ *se, e somente se,* $3/5x + 19/5 = -10/6x + 50/6$*. Portanto,* $x = 2$*.*

Substituindo o valor de x *em qualquer uma das duas equações do sistema nos dá* $y = 5$*. Logo, o ponto de interseção é* $(2, 5)$*.*

Exercício 14 *(a) Como o coeficiente angular é* -2*, então a reta tem a forma* $y = -2x + b$*. Agora, como* $(3, -1)$ *pertence a essa reta temos* $-1 = -2.(3) + b$ *donde vem que* $b = 5$*. Portanto, a reta procurada é:* $y = -2x + 5$*.*

(b) $5x - 2y = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 1$

Sabe-se que, para que duas retas sejam perpendiculares, seus coeficientes angulares devem ser opostos e inversos. Tendo $\frac{5}{2}$ *como coeficiente da primeira, temos que o coeficiente da reta procurada será* $\frac{-2}{5}$*. Sabendo que o ponto* $(-2, 3)$ *pertence a reta:*

$3 = \dfrac{-2(-2)}{5} + n \Rightarrow n = \frac{11}{5}$

Assim, a reta procurada é: $y = \frac{-2}{5}x + \frac{11}{5}$*.*

(c) Primeiro, note que a reta procurada é perpendicular à reta passando pelos pontos $(0, 0)$ *e* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$*, que é a reta y = x, assim seu coeficiente é -1. Como ela passa no ponto* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$*, temos:* $\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + b$*, temos que* $b = \sqrt{2}$*. Assim sua equação é* $y = -x + \sqrt{2}$*.*

Exercício 15 *(a) Usando a fórmula da distância de um ponto à reta, vem*

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 + 4|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}.$$

(b) *Dado um triângulo ABC, com os pontos M e N como pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente. Temos,*

$$\vec{MN} = \vec{BC}/2 + \vec{CA}/2 = 1/2(\vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{AB}/2.$$

Exercício 16 (a) $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 25$ *(Por completamento de quadrados)*

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

Circunferência com raio 5 e centro $(3, -4)$.

(b) $x^2 + y^2 - 10y = -25$

$x^2 + (y - 5)^2 = 0$

Ponto $(0, 5)$.

(c) $x^2 + y^2 < 1$

Circulo aberto (s/ fronteira) com centro $(0, 0)$ *e raio 1.*

(d) $x^2 + y^2 \geq 1$

$\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 0\}$.

(e) $x = -\sqrt{1 - y^2}$

Semicircunferência com eixo vertical com valores de x *negativos.*

(f) *Não existe.*

Exercício 17 *Como* $x = 50t$, *então* $x = \frac{t}{50}$. *Substituindo em* y, *vem*

$$y = 50t - t^2 = 50\left(\frac{x}{50}\right) - \left(\frac{x}{50}\right)^2 = x - \frac{1}{2500}x^2,$$

que descreve uma parábola $y = ax^2 + bx + c$, *para* $a = -\frac{1}{2500}$, $b = 1$ *e* $c = 0$. *O projétil atinge o chão quando* $y = 0$, *logo,*

$$0 = x - \frac{1}{2500}x^2 = x(1 - \frac{1}{2500}x),$$

assim, $x = 0$ *(que não interessa, pois é a posição inicial), ou* $\frac{1}{2500}x = 1$, *assim,* $x = 2500$. *Portanto, o projétil atinge o chão à uma distância de* $2500m$ *do canhão. Por fim, como o trajeto é uma parábola com concavidade para baixo, então a altura máxima é o* y *do vértice da parábola, logo,*

$$h_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1^2 - 4 \cdot \frac{-1}{2500} \cdot 0}{4 \cdot \frac{-1}{2500}} = \frac{1}{\frac{4}{2500}} = \frac{2500}{4} = 625.$$

Portanto, a altura máxima é $625m$.

Exercício 18 (a) $x = y^2$ *diz que* x *está em função de* y *e* x *é sempre positivo, logo, é uma parábola com a concavidade para a direita com* $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = 0$. *O seu vértice, pelos eixos estarem trocados, é dado por* $x_v = -\frac{\Delta}{4a} = 0$ *e o seu eixo de simetria é dado por* $y_v = -\frac{b}{2a} = 0$. *Logo, seu verticie é* $(0, 0)$

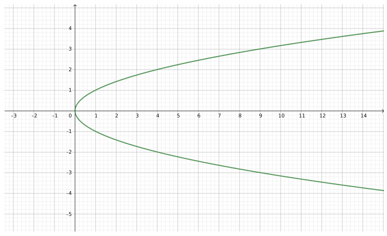


Figura 1: Exercício 16 Item (a)

(b) $y = -x^2$ *diz que* y *está em função de* x *e* y *é sempre negativo, logo, é uma parábola com a concavidade para baixo com* $a = -1$, $b = 0$ *e* $c = 0$. *O seu vértice é dado por* $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$ *e o seu eixo de simetria é dado por* $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = 0$. *Logo, seu verticie é* $(0, 0)$.

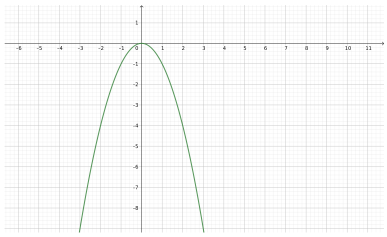


Figura 2: Exercício 16 Item (b)

(c) $y^2 - 4x - 4y = 0$ *pode ser escrito como* $x = \frac{1}{4}y^2 - y$. *Logo, como* x *está em função de* y *e o coeficiente de* y^2 *é positivo, então é uma parábola deitada para a direita. Ela corta o eixo* y *em* $x = 0$, *logo,*

$$0 = \frac{1}{4}y^2 - y = y\left(\frac{1}{4}y - 1\right),$$

assim, $y = 0$ *ou* $y = 4$. *O vértice dessa parábola (lembrando que* x *está em função de* y*) é*

$$\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) = \left(-\frac{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0}{4 \cdot \frac{1}{4}}, -\frac{(-1)}{2 \cdot \frac{1}{4}}\right) = (-1, 2).$$

O eixo dessa parábola deve ser paralela ao eixo x *e passar pelo ponto* $(-1, 2)$, *logo, o eixo de simetria é a reta* $y = 2$.

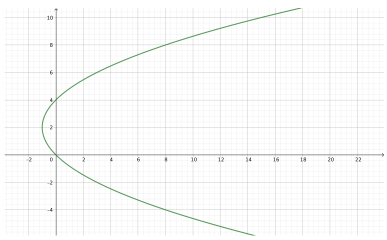
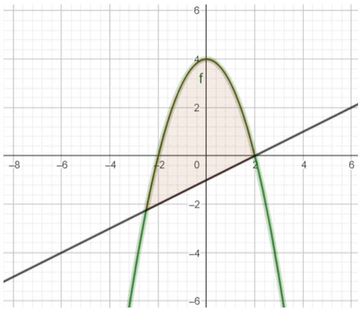
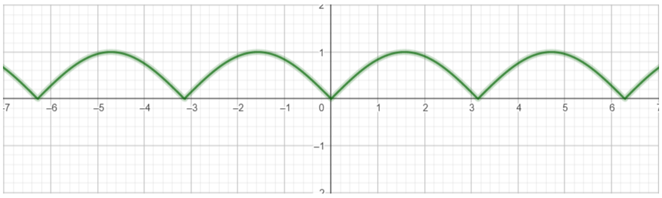


Figura 3: Exercício 16 Item (c)

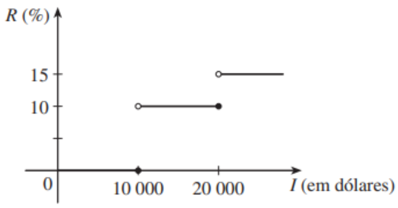
Exercício 19 *A região delimitada pelas curvas* $y = 4 - x^2$ *e* $x - 2y = 2$ *é dada por*



Exercício 20 *O gráfico de* $y = |\sin x|$ *é dado por*

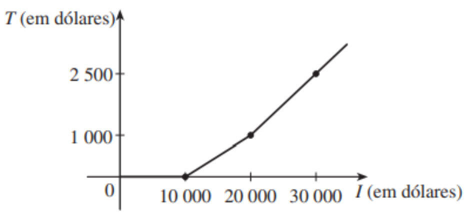


Exercício 21 *(a)*



(b) Os impostos cobrados sobre os rendimentos de $\$14.000$ *e* $\$26.000$ *são, respectivamente,* $\$4.000 \times 0,1 = \$400$ *e* $\$10.000 \times 0,1 + \$6.000 \times 0,15 = \$1.000 + \$900 = \$1.900$.

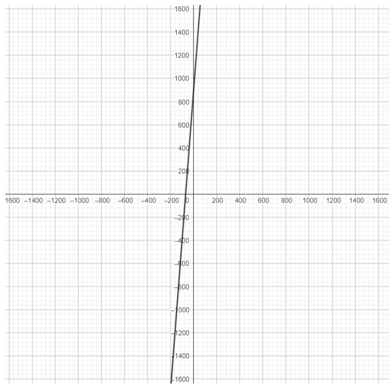
(c)



Exercício 22 *(a) Como o custo* (C) *é linear, temos que* $C = ax+b$, *em que* x *representa o número de cadeiras produzidas. Para encontrar* a *e* b *basta resolver o seguinte sistema*

$$\begin{cases} 2200 = 100a + b \\ 4800 = 300a + b, \end{cases}$$

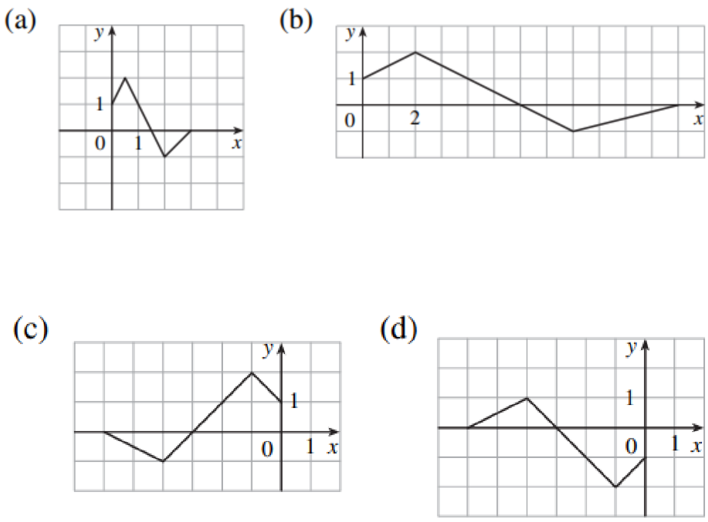
o qual nos diz que $a = 13$ *e* $b = 900$. *Portanto,* $C = 13x + 900$.



(b) A inclinação do gráfico, denotada por a, é 13 e representa o custo marginal (mudança no custo total resultante da variação de 1 unidade na produção).

(c) A interseção do gráfico com o eixo y, denotado por b, é 900 e representa o custo fixo da produção (aquele que existe independente da quantidade produzida).

Exercício 23 .



Exercício 24 *(a)* 4.

(b) 3.

(c) 0.

(d) Não existe pois $f(6) = 6$ *não está no domínio de* g.

(e) 4.

(f) -2.

Exercício 25 *(a)* $y = e^x - 2$.

(b) $y = e^{x-2}$.

(c) $y = -e^x$.

(d) $y = e^{-x}$.

(e) $y = -e^{-x}$.

Exercício 26 *(a) Polinomial.*

(b) Racional.

(c) Racional.

(d) Afim.

(e) Constante.

(f) Qualquer.

Exercício 27 *(a) Para função* f *par, temos que* $f(x) = f(-x)$*, ou seja, ela é simétrica em relação ao eixo* y*. Agora de uma função* f *ímpar, temos* $f(-x) = -f(x)$*. Assim, os pontos do gráfico de* f *satisfazem*

$$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x)) = -(x, f(x)),$$

ou seja, o gráfico de f *é simétrico em relação à origem* $(0, 0)$*.*

(b) Como motivação, vamos supor que já existam tais funções g *e* h*, com* g *par e* h *ímpar, tais que* $f(x) = g(x) + h(x)$*. Como vale para todo* x*, trocando* x *por* $-x$*, vem*

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x).$$

Assim, temos um sistema

$$\begin{cases} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(x) - h(x). \end{cases}$$

Somando as duas equações, vem

$$f(x) + f(-x) = 2g(x),$$

e subtraindo as duas equações, vem

$$f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ e } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

E de fato, tomando g *e* h *dessa forma, vem que* g *é par,* h *é ímpar e* $g(x) + h(x) = f(x)$*.*

(c) *Vamos verificar cada uma das funções abaixo:*

(a) $f(x) = x^3$ *é ímpar, pois* $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

(b) $f(x) = |x|$ *é par, pois* $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

(c) $f(x) = x(x^3 - x)$ *é par, pois*

$$f(-x) = (-x)((-x)^3 - (-x)) = -x(-x^3 + x) = x(x^3 - x) = f(x).$$

(d) $f(x) = x^4 + x^2$ *é par, pois*

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x).$$

(e) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$ *é ímpar, pois*

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 - x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x).$$

(f) $f(x) = tg(x)$ *é ímpar, pois*

$$f(-x) = tg(-x) = \frac{sen(-x)}{cos(-x)} = \frac{-sen(x)}{cos(x)} = -\frac{sen(x)}{cos(x)} = -tg(x) = -f(x).$$

Exercício 28 *(a) Dado* x *real, existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \le x < n + 1$. *Note que se* $x \le \frac{2n+1}{2}$, *então* $\{x\} = x - n$, *e se* $x \ge \frac{2n+1}{2}$, *então* $\{x\} = n + 1 - x$. *Logo, no intervalo* $[n, \frac{2n+1}{2}]$, *o gráfico é a reta* $x - n$ *(que passa por* $(n, 0)$ *e* $(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2})$*), e em* $[\frac{2n+1}{2}, n + 1)$, *o gráfico é a reta* $n + 1 - x$ *(que passa por* $(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2})$ *e devia passar por* $(n + 1, 0)$, *mas este ponto é completado pelo próximo* n*).*

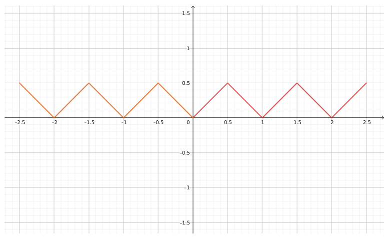


Figura 4: Exercício 19 Item (a)

(b) Dado $x \in \mathbb{R}$, *existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \le x < n + 1$. *Assim,* $[x] = n$. *Logo, no intervalo* $[n, n + 1)$, *o gráfico é a função constante* n. *E em* $n + 1$, *ela tem um salto para a função constante* $n + 1$.

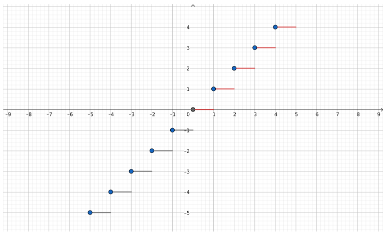


Figura 5: Exercício 19 Item (b)

(c) Dado $x \in \mathbb{R}$, *existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \leq x < n+1$, *logo,* $[x] = n$, *assim,* $x - [x] = x - n$, *que é a parte decimal de* x. *Portanto, o gráfico são segmentos de retas inclinadas periódicas.*

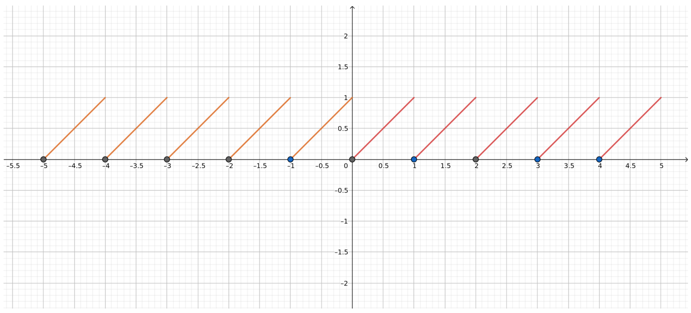


Figura 6: Exercício 19 Item (c)

(d) Dado $x \in \mathbb{R}$, *existe um único* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \leq x < n+1$. *Divida o intervalo* $[n, n+1)$ *em quatro sub-intervalos de mesmo comprimento, a saber,*

$$[n, \frac{4n+1}{4}), [\frac{4n+1}{4}, \frac{2n+1}{2}), [\frac{2n+1}{2}, \frac{4n+3}{4}), [\frac{4n+3}{4}, n+1).$$

Se x *está no primeiro, então* $4x$ *está em* $[4n, 4n+1)$, *logo, caímos no caso do item* (a), *que o gráfico é um triângulo, e o mesmo ocorre nos demais três sub-intervalos. Então em* $[n, n+1)$, $\{4x\}$ *são quatro triângulos de altura* $\frac{1}{2}$. *Assim,* $\frac{1}{4}\{4x\}$ *são quatro triângulos de altura* $\frac{1}{8}$.

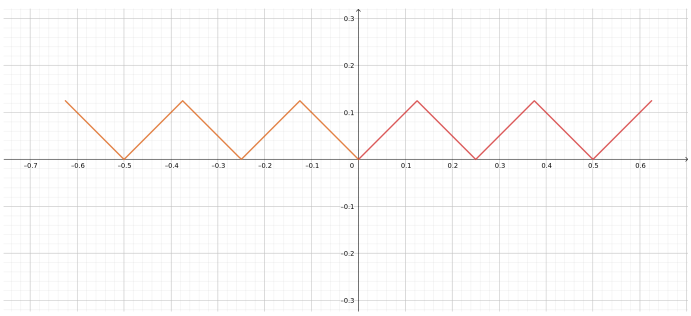


Figura 7: Exercício 19 Item (d)

Exercício 29 *(a) Como um período* T *deve valer para todo* x*, em particular, deve valer para* $x = 0$*, logo,*

$$\text{sen}(2 \cdot 0) = \text{sen}(2(0 + T)) \Rightarrow 0 = \text{sen}(2T) \Rightarrow 2T = 0 + 2n_1\pi \textit{ ou } 2T = \pi + 2n_2\pi,$$

com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$*. Logo,*

$$T = n_1\pi \textit{ ou } T = \frac{\pi}{2} + n_2\pi.$$

Como T *deve ser o menor possível, poderíamos considerar* $T = \frac{\pi}{2}$*, mas note que isto não é um período para* f*, pois para* $x = \frac{\pi}{4}$*, temos*

$$f(x + T) = \text{sen}(2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})) = \text{sen}(2\frac{6\pi}{8}) = \text{sen}(\frac{6\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1,$$

mas

$$f(x) = \text{sen}(2\frac{\pi}{4}) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Logo, o segundo menor é $T = \pi$*. Este de fato é um período para* f*, pois*

$$f(x + T) = \text{sen}(2(x + \pi)) = \text{sen}(2x + 2\pi) = \text{sen}(2x) = f(x).$$

Portanto, f *é periódica e o seu período fundamental é* π*.*

(b) Pelo mesmo raciocínio, se T *é um período, em particular, vale para* $x = 0$*, logo, devemos ter*

$$0 = \text{sen}(T) + \text{sen}(\pi T) \Rightarrow \text{sen}(T) = -\text{sen}(\pi T),$$

logo, no círculo trigonométrico vemos que $T = -\pi T + 2n_1\pi$ *ou* $T = \pi T - \pi + 2n_2\pi$*, para* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$*. Resolvendo para* T*, vem*

$$T = \frac{2n_1\pi}{\pi + 1} \textit{ ou } T = \frac{\pi - 2n_2\pi}{\pi - 1}.$$

Assim, como T *deve ser o menor possível positivo, vem*

$$T = \frac{2\pi}{\pi + 1} \textit{ ou } T = \frac{\pi}{\pi - 1}.$$

Mas para $x = \frac{\pi}{2}$*, não vale* $f(x + T) = f(x)$*, para nenhum dos dois* T*. Portanto,* f *não é periódica. Um outro jeito de provar que não existe tal* T *envolve derivada. Suponha, por absurdo, que tal* T *existe. Derivando a igualdade*

$$\text{sen}(x) + \text{sen}(\pi x) = \text{sen}(x + T) + \text{sen}(\pi(x + T))$$

duas vezes em relação à x*, vem*

$$-\text{sen}(x) - \pi^2\text{sen}(\pi x) = -\text{sen}(x + T) - \pi^2\text{sen}(\pi(x + T)).$$

Somando as duas igualdades, vem

$$(1 - \pi^2)\text{sen}(\pi x) = (1 - \pi^2)\text{sen}(\pi(x + T)) \Rightarrow \text{sen}(\pi x) = \text{sen}(\pi(x + T))).$$

Na primeira equação, isso implica que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x+T)$*, logo,* T *é um período para* $\operatorname{sen}(x)$*, e como o período fundamental de* $\operatorname{sen}(x)$ *é* 2π*, então* $T = 2k\pi$*. Mas por outro lado,* $\operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(\pi x + \pi T)$ *diz que* $\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(y + \pi T)$*, então novamente,* πT *é um período para* $\operatorname{sen}(y)$*, logo,* $\pi T = 2k'\pi$*, assim,* $T = 2k'$*. Temos uma contradição, pois* $2k'$ *é racional e* $2k\pi$ *é irracional.*

(c) f *não é periódica. De fato, suponha, por absurdo, que exista um período* $T > 0$ *para* f*. Então existe um único inteiro* n *tal que* $n \leq T < n+1$*. Assim,*

$$[0] = [0+T] \Rightarrow 0 = [T] \Rightarrow 0 = n.$$

Portanto, $0 \leq T < 1$*. Agora considere* $x = 1 - \frac{T}{2}$*. Note que* $0 < x < 1$*, assim,* $[x] = 0$*. Mas*

$$[x+T] = [1 - \frac{T}{2} + T] = [1 + \frac{T}{2}] = 1,$$

pois $1 < 1 + \frac{T}{2} < 2$*. Logo,* T *não é período para* f*. Portanto,* f *não é periódica.*

(d) Note que $T = 2\pi$ *é um período para* f*, pois*

$$f(x+2\pi) = 3\cos((x+2\pi)+2) = 3\cos((x+2)+2\pi) = 3\cos(x+2) = f(x).$$

Agora se T *é um período para* f*, em particular, para* $x = -2$*, vale*

$$f(-2) = f(-2+T) \Rightarrow 3\cos(-2+2) = 3\cos(-2+T+2) \Rightarrow 1 = \cos(T),$$

logo, $T = 2k\pi$*, onde* $k \in \mathbb{Z}$*, logo, o menor positivo é* $T = 2\pi$*.*

Exercício 30 *(1)*

- *(a)* $\frac{\pi}{12}$
- *(b)* $\frac{7\pi}{12}$
- *(c)* $\frac{3\pi}{4}$
- *(d)* $\frac{7\pi}{2}$

(2)

- *(a)* $300°$
- *(b)* $84°$
- *(c)* $1500°$
- *(d)* $36°$

Exercício 31 *Sejam* (a_0, b_0) *e* (a_1, b_1) *os dois pontos do enunciado. Dado um* (x, y) *nas condições do enunciado, temos*

$$\frac{\sqrt{(x-a_0)^2 + (y-b_0)^2}}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}} = c,$$

ou seja,

$$(x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 = c^2[(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2],$$

e desenvolvendo,

$$x^2 - 2a_0x + a_0^2 + y^2 - 2b_0y + b_0^2 = c^2x^2 - 2a_1c^2x + c^2a_1^2 + c^2y^2 - 2b_1c^2y + c^2b_1^2.$$

Agora agrupando os termos em comum, vem

$$(c^2-1)x^2 - 2(a_1c^2 - a_0)x + (c^2-1)y^2 - 2(b_1c^2 - b_0)y + c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - a_0^2 - b_0^2 = 0.$$

Como $c^2 - 1 \neq 0$, pois $c \geq 0$ e $c \neq 1$, podemos dividir por $c^2 - 1$ e obter

$$x^2 - 2\frac{a_1c^2 - a_0}{c^2-1}x + y^2 - 2\frac{b_1c^2 - b_0}{c^2-1}y + \frac{c^2a_1^2 + c^2b_1^2 - a_0^2 - b_0^2}{c^2-1} = 0.$$

Completando quadrados, vem

$$\left(x - \frac{a_1c^2 - a_0}{c^2-1}\right)^2 + \left(y - \frac{b_1c^2 - b_0}{c^2-1}\right)^2 = \frac{c^2[(a_0-a_1)^2 + (b_0-b_1)^2]}{(c^2-1)^2},$$

que é a equação de uma circunferência de centro

$$\left(\frac{a_1c^2 - a_0}{c^2-1}, \frac{b_1c^2 - b_0}{c^2-1}\right),$$

e raio

$$\sqrt{\frac{c^2[(a_0-a_1)^2 + (b_0-b_1)^2]}{(c^2-1)^2}} = \frac{c}{|c^2-1|}\sqrt{(a_0-a_1)^2 + (b_0-b_1)^2}.$$

Exercício 32 *(a) A área de um setor circular de ângulo θ de uma circunferência de raio r é dada por*

$$\frac{\theta \cdot r^2}{2}.$$

Seja $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $tg(\theta) = 3$ (A saber, $\theta = \arctan(3)$, que é aproximadamente $1,249$). Note que a área da região esquerda é a área da região direita. Agora, a área da região direita é

$$\frac{\theta \cdot 3^2}{2} - \frac{\theta \cdot 2^2}{2} = \frac{5}{2}\theta.$$

Assim, a área é

$$5\theta = 5\mathrm{arctg}(3) \cong 5 \cdot 1,2409 = 6,245.$$

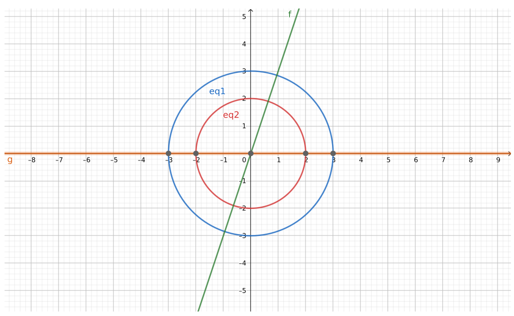


Figura 8: Exercício 23 Item (a)

(b) *[(i)]*

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)}{h}\\ &= \frac{x^2+2hx+h^2+x+h-x^2-x}{h}\\ &= \frac{2hx+h^2+h}{h}\\ &= 2x+h+1\end{aligned}$$

[(ii)]

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)+5-(3x+5)}{h}\\ &= \frac{3x+3h+5-3x-5}{h}\\ &= \frac{3h}{h}\\ &= 3\end{aligned}$$

[(iii)]

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h)+\operatorname{sen}(h)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{h}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)(\cos(h)-1)+\operatorname{sen}(h)\cos(x)}{h}\end{aligned}$$

[(iv)]

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &= \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\ &= 3x^2+3xh+h^2\end{aligned}$$

Exercício 33 *(a) Uma função f é injetora se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Assim, f é injetora se cada valor do contra-domínio é assumida por, no máximo, um único ponto do domínio, logo, geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de f em, no máximo, um único ponto.*

(b) Uma função f é sobrejetora se para todo y no contra-domínio, existe um x no domínio tal que $f(x) = y$. Assim, f é sobrejetora se cada valor do contra-domínio é assumida por, pelo menos, um ponto do domínio, logo, geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de f em, no mínimo, um ponto.

(c) Uma função f é bijetora se f é injetora e sobrejetora. Geometricamente, cada reta horizontal intersecta o gráfico de f em um único ponto.

Exercício 34 *(a) É bijetora, pois*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 5x + 1 = 5y + 1 \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y,$$

e para cada $y \in \mathbb{R}$, tomando $x = \frac{y-1}{5}$, vem

$$f(x) = 5\frac{y-1}{5} + 1 = y - 1 + 1 = y.$$

(b) Não é injetora, pois $f(-1) = 5 = f(1)$, e não é sobrejetora, pois -1 não é assumido por nenhum x, pois $f(x) \geq 4$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) *Não é injetora, pois* $f(\frac{\pi}{2}) = 0 = f(\frac{3\pi}{2})$. *Mas é sobrejetora, basta checar no círculo trigonométrico.*

(d) *É bijetora, pois*

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 4 = y^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \sqrt{y^2} = |y|,$$

mas $y \geq 0$, *então* $|y| = y$, *daí,* $x = y$, *e dado* $y \in [4, \infty)$, *tomando* $x = \sqrt{y-4} \in [0, \infty)$, *vem*

$$f(x) = (\sqrt{y-4})^2 - 4 = y - 4 + 4 = y.$$

(e) *É bijetora, basta fazer a interpretação geométrica no círculo trigonométrico.*

(g) *É injetora, pelo mesmo argumento do item* (d), *mas não é sobrejetora, pois* -1 *não é imagem de nenhum ponto.*

Exercício 35 (a) *Nem sempre, por exemplo, a inversa de* $f(x) = x$ *é* $g(x) = x$, *que é diferente de* $\frac{1}{x}$.

(b) *O item* (a) *admite inversa* $g(x) = \frac{x-1}{5}$, *o item* (d) *admite inversa* $g(x) = \sqrt{x-4}$ *e o item* (e) *admite inversa* $g(x) = \mathrm{arctg}(x)$. *As outras funções não admitem inversa pelas seguintes razões:*

(b) e (g) - Diferentemente da letra (d) na qual é restringido com um intervalo tanto o domínio quanto a imagem, essa função não tem $\mathrm{Im}(f)$, *ou* $\mathrm{D}(g)$, *restringido, e por causa disso temos que nem todos os valores do domínio* $\mathrm{D}(g)$ *encontram resposta dentro da imagem* $\mathrm{Im}(g)$, *como por exemplo* $g(3) = \sqrt{-1}$.

(c) - $f(x) = \cos(x)$ *normalmente tem a inversa* $g(x) = \arccos(x)$, *em que* $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. *Todavia, ao se colocar que o domínio de* $f(x)$ *se restringe a* $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ *significa que a imagem de sua inversa também deveria ficar restrita a esses valores. Contudo, para essa faixa de imagem* $\mathrm{Im}(f)$ *usada,* $g(x)$ *pode acabar devolvendo valores fora dela, exemplo disso é* $g(0,5) = -\frac{\pi}{3} = \frac{5\ \mathrm{pi}}{3}$, *que está fora do intervalo do domínio* $\mathrm{D}(f)$.

Exercício 36

$$\begin{aligned}
y = \frac{e^x}{1 + 2e^x} &\Leftrightarrow y(1 + 2e^x) = e^x \\
&\Leftrightarrow y + 2ye^x = e^x \\
&\Leftrightarrow y = e^x(1 - 2y) \\
&\Leftrightarrow \ln y = x + \ln(1 - 2y) \\
&\Leftrightarrow x = \ln y - \ln(1 - 2y) \\
&\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1 - 2y}\right).
\end{aligned}$$

Exercício 37 *Seja* H, h, d *e* c *a altura do poste, a altura do homem, a distância entre o homem o poste e o comprimento da sombra, respectivamente, podemos considerar uma semelhança de triângulos em que temos como lados semelhantes* $H \sim h$ *e* $(d+c) \sim c$. *Sabendo que a razão entre as semelhanças são iguais, temos que* $\frac{H}{h} = \frac{(d+c)}{c}$, *isolando o* c *temos* $c = \frac{hd}{(H-h)}$. *Por fim, trocando* H *e* h *por* $4,5m$ *e* $1,8m$ *temos a função final* $c(d) = d\frac{1,8}{4,5-1,8} = d\frac{1,8}{2,7} = d\frac{2}{3}$.

Exercício 38 *Como ambos saem do mesmo ponto, podemos considerar este ponto como a origem do plano cartesiano. Como as trajetórias são retilíneas e perpendiculares, sem perda de generalidade, podemos supor que o homem que caminha com velocidade de 2 km/h anda no eixo x e que o homem que caminha com velocidade 3 km/h, no eixo y. Desta forma, as trajetórias em função do tempo são, respectivamente,* $(2t, 0)$ *e* $(0, 3t)$. *Aplicando o teorema de Pitágoras para calcular a distância entre os dois homens teremos que:*

$$d = \sqrt{(2t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{13}t.$$

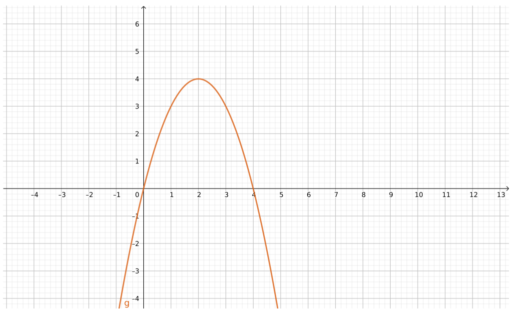
Exercício 39 *Como a densidade* ρ *aumenta linearmente com a profundidade* h, *então basta termos dois pontos para encontrar esta reta. Seja* x *a profundidade do reservatório. Sabemos que na superfície, ou seja,* $h = 0$, *temos densidade* $\rho = \rho_0$, *e no fundo, para* $h = x$, *temos densidade* $\rho = \rho_1$. *Logo, o coeficiente angular desta reta é*

$$m = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x - 0} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}.$$

Assim, $\rho = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}h + q$, *e como para* $h = 0$ *temos* $\rho = \rho_0$, *então* $q = \rho_0$. *Portanto,*

$$\rho(h) = \frac{\rho_1 - \rho_0}{x}h + \rho_0.$$

Exercício 40 *(a) Representa uma parábola, com concavidade para baixo, que corta o eixo* x *em* $(0, 0)$ *e em* $(4, 0)$.



(b) A altura máxima é o y *do vértice, que é dada por*

$$h_{max} = -\frac{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = -\frac{16}{-4} = 4,$$

e o seu instante é o x *do vértice, que é dada por*

$$t_0 = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2.$$

Exercício 41 *Seja* T *a projeção ortogonal do ponto* R *no segmento* OP. *Se* S *está entre* O *e* T, *podemos fazer semelhança de triângulos para obter que a altura do triângulo sombreado é* x *e, daí, a área é*

$$A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Agora, se S *está entre* T *e* P, *então a área* A *é a soma da área do triângulo* ORT, *que é* $\frac{25}{2}$, *com a área do retângulo sombreado, que é* $5 \cdot (x - 5)$. *Portanto,*

$$A(x) = 5x - 25 + \frac{25}{2} = 5x - \frac{25}{2}.$$

Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 5x - \frac{25}{2}, & 5 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Exercício 42 *Sejam* a *e* b *a medida dos lados do retângulo. Como o seu perímetro é* $2p$, *então* $2a + 2b = 2p$, *logo,* $a + b = p$. *A sua área é dada por*

$$A = a \cdot b = a \cdot (p - a) = pa - a^2.$$

Logo, sendo uma parábola com concavidade para baixo, a área máxima ocorre para a *sendo o* x *do seu vértice, logo,*

$$a = -\frac{p}{2 \cdot (-1)} = \frac{p}{2},$$

assim,

$$b = p - a = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}.$$

Portanto, o retângulo é um quadrado com lado medindo $\frac{p}{2}$.

Exercício 43 *Coloquemos este fio no eixo* x, *de modo que a extremidade esquerda seja* $x = 0$ *e a extremidade direita seja* $x = 10$. *Seja* x *a posição do corte feito. Sem perda de generalidade, usemos o primeiro segmento, de comprimento* x, *para formar o quadrado de lado* l, *e o segundo segmento, de comprimento* $10 - x$, *para formar a circunferência de raio* r. *Assim,*

$$4l = x \Rightarrow l = \frac{x}{4},$$

logo, o quadrado delimita uma área

$$A_q(x) = l^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Agora

$$2\pi r = 10 - x \Rightarrow r = \frac{10 - x}{2\pi},$$

logo, a circunferência delimita uma área

$$A_c(x) = \pi \cdot r^2 = \pi \left(\frac{10 - x}{2\pi}\right)^2 = \frac{100 - 20x + x^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}.$$

Assim, a soma das áreas é

$$A(x) = A_q(x) + A_c(x) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - \frac{5}{\pi}x + \frac{25}{\pi}.$$

Note que é uma parábola com concavidade para cima, logo, o máximo ocorre em $x = 0$ *ou* $x = 10$. *Mas*

$$A(0) = \frac{25}{\pi}$$

e

$$A(10) = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)10^2 - \frac{5}{\pi}10 + \frac{25}{\pi} = \frac{25}{4}.$$

Como $\pi < 4$, *então* $\frac{25}{\pi} > \frac{25}{4}$. *Portanto, a área máxima ocorre para* $x = 0$. *Usamos o fio inteiro para a circunferência.*

Exercício 44 *Se* $0 \leq x \leq 5$, *então podemos fazer semelhança de triângulos e pelo caso AA (ângulo-ângulo) podemos concluir que a altura do triângulo sombreado é* $2x$, *pois*

$$\frac{10}{h} = \frac{5}{x} \Rightarrow h = 2x.$$

Logo,

$$A(x) = \frac{x \cdot (2x)}{2} = x^2.$$

Agora, se $5 < x \leq 10$, *então a área sombreada é a soma da área do triângulo retângulo esquerdo, que é* $\frac{5.10}{2} = 25$, *com a área sombreada no triângulo direito. Para encontrar a área sombreada no triangulo retângulo direito podemos fazer semelhança de triângulos, usando o caso AA (ângulo-ângulo), para concluir que a altura do triângulo não sombreado é* $20 - 2x$, *pois*

$$\frac{10}{h} = \frac{5}{10 - x} \Rightarrow h = 10 - 2x.$$

Logo,

$$A(x) = 25 - \frac{(10 - x)(20 - 2x)}{2} = 25 - \frac{2x^2 - 40x + 200}{2} = -x^2 + 20x - 75.$$

Portanto,

$$A(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 5, \\ -x^2 + 20x - 50, & 5 < x \leq 10 \end{cases}.$$

Exercício 45 *Seja* h *a medida da altura do triângulo inscrito. Assim, a altura divide o segmento* OB *em dois segmentos, de medida* m *e* n, *respectivamente. Note que usando a definição de tangente para o ângulo direito, temos*

$$tg(\theta) = \frac{h}{n}.$$

Agora, o ângulo da esquerda é $90^\circ - \theta$, logo, usando a definição de tangente, temos

$$\frac{h}{m} = tg(90^\circ - \theta) = \frac{sen(90^\circ - \theta)}{cos(90^\circ - \theta)} = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} = \frac{1}{tg(\theta)}.$$

Logo,

$$b = m + n = htg(\theta) + \frac{h}{tg(\theta)} = h\left(tg(\theta) + \frac{1}{tg(\theta)}\right) = h\left(\frac{tg^2(\theta)+1}{tg(\theta)}\right).$$

Portanto,

$$h = \frac{btg(\theta)}{tg^2(\theta)+1}.$$

Assim,

$$A(\theta) = \frac{b \cdot \frac{btg(\theta)}{tg^2(\theta)+1}}{2} = \frac{b^2tg(\theta)}{2(tg^2(\theta)+1)}.$$

Exercício 46 *Note que área da base* $= (20-2x)(12-2x)$*, altura* $= x$ *e volume* $=$ *área da base* $\times$ *altura* $= (20-2x)(12-2x)x = 4x^2 - 64x + 240$*.*

Exercício 47 $\mathrm{Dom}(h) = f^{-1}(\mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Im}(f))$.

(a) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$

(b) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(g) = [2, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(h) = [2, +\infty)$

(c) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} - \{0\}$

(d) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(g) = (0, 1]$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(h) = (0, 1]$

(e) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}(g) = (-\infty, 1]$, $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$, $\mathrm{Im}(h) = [0, 1]$

(f) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$ $\mathrm{Dom}(h) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(h) = [0, +\infty)$

(g) $\mathrm{Dom}(g) = (0, +\infty)$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ h *não está definida*
$\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1]$,

(h) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 1]$
$\mathrm{Im}(g) = (0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [0, 1]$, $\mathrm{Im}(h) = [1, e]$

Exercício 48 *Se* f *e* g *são pares, então* $f(x) = f(-x)$ *e* $g(x) = g(-x)$*. Logo,*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(-x)) = f \circ g(-x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(-x)) = g \circ f(-x),$$

e portanto $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são pares.*

Se f *e* g *são ímpares, então* $f(x) = -f(-x)$ *e* $g(x) = -g(-x)$*. Logo,*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-g(-x)) = -f(g(-x)) = -f \circ g(-x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-f(-x)) = -g(f(-x)) = -g \circ f(-x),$$

e portanto $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são ímpares.*

Se f *é par e* g *é impar, então* $f(x) = f(-x)$ *e* $g(x) = -g(-x)$*. Logo,*

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-g(-x)) = f(g(-x)) = f \circ g(-x)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(-x)) = g \circ f(-x),$$

e portanto $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *são pares.*

Exercício 49

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} & e & D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} \\[2ex]
\text{(b)} & g^{-1}(x) = \dfrac{3}{x-2} - 1 & e & D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \\[2ex]
\text{(c)} & g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1} - 1 & e & D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\} \\[2ex]
\text{(d)} & g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1 & e & D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\} \\[2ex]
\text{(e)} & g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2 & e & D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\}
\end{array}$$

Exercício 50 *Se* x *é o lado do triângulo equilátero, então o seu perímetro é* $3x$*. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos a sua altura* $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$*, logo, a sua área é*

$$\frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}.$$

Exercício 51 *Seja* a *a aresta do cubo. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que a diagonal da face da base mede* $\sqrt{2}a$ *e, consequentemente, a diagonal mede* $d = \sqrt{3}a$*. Portanto, a aresta em função do comprimento da diagonal é*

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}d = \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Assim, a área da superfície é

$$6 \cdot a^2 = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} d\right)^2 = 6 \cdot \frac{3}{9} d^2 = 2d^2,$$

e o volume do cubo é

$$a^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} d\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{27} d^3 = \frac{\sqrt{3}}{9} d^3.$$

Exercício 52 *Se uma curva simétrica em relação ao eixo* x *é gráfico de uma função* f*, então* $(x, f(x))$ *está na curva se, e somente se,* $(x, -f(x))$ *está na curva. Agora, dado* x *no domínio da* f*,* $(x, f(x))$ *e* $(x, -f(x))$ *estão no gráfico, mas como um ponto* x *só tem uma imagem, devemos ter*

$$f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Portanto, f *é a função nula.*