Aula 14 - Exercícios
Funções Trigonométricas inversas
Motivação para derivada

Primeiro Semestre de 2023

Questão 2 Considere a função $f(x) = \sin(\pi x) + \cos(3\pi x)$. É correto afirmar que:

(a) f é uma função par e periódica de período 2π.

(b) f é uma função ímpar e periódica de período 2π.

(c) f é uma função par e periódica de período 2.

(d) f é uma função ímpar e periódica de período 2.

(e) f é uma função ímpar e periódica de período π.

(f) Nenhuma das opções anteriores.

Gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x) + \cos(3\pi x)$

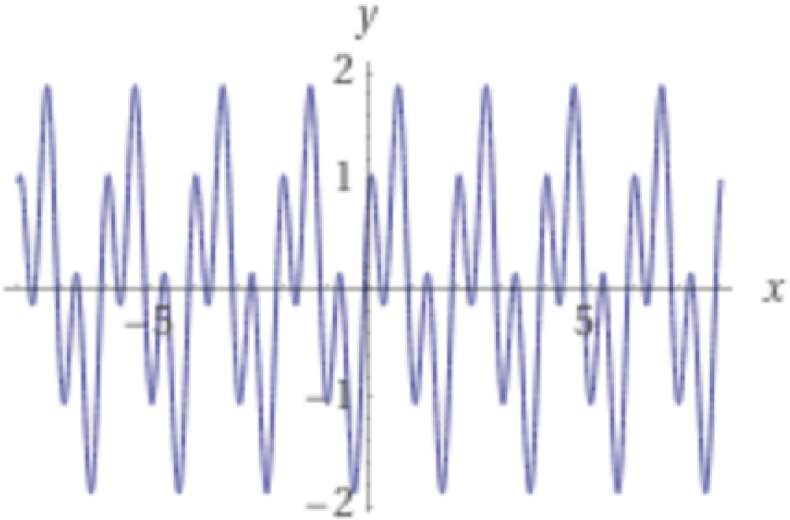
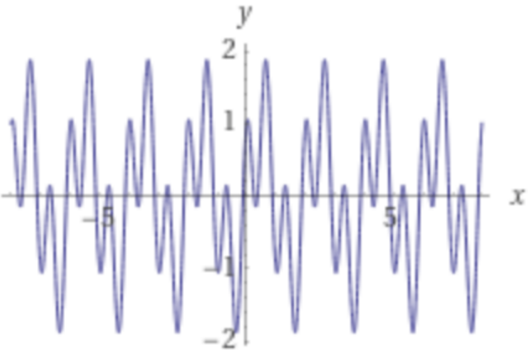
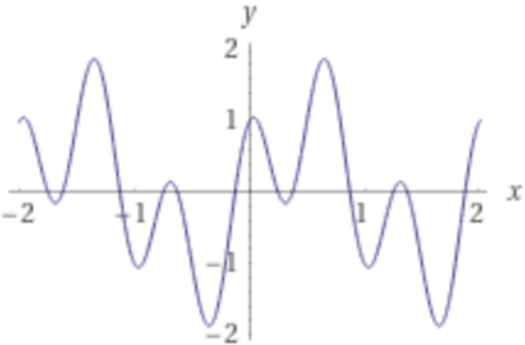


Gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x) + \cos(3\pi x)$



(x from −8 to 8)

Gráfico de $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x) + \cos(3\pi x)$



(x from −2 to 2)

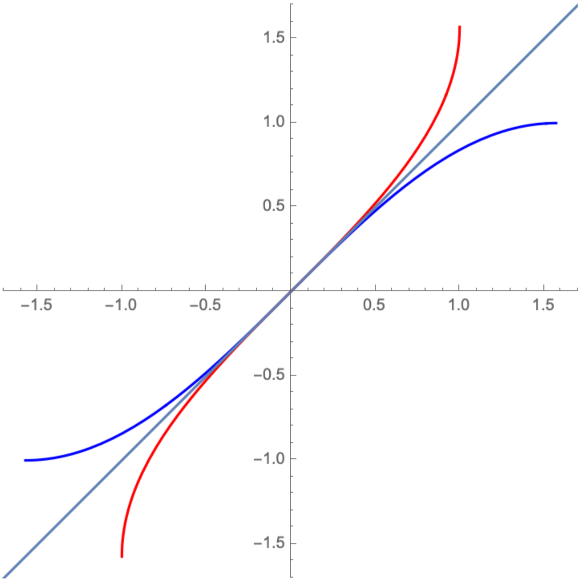
Exemplo

A inversa da função $f(x) = sen(x)$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) = \mathrm{arcsen}(x)$, para $x \in [-1, 1]$.

Solução: Observe que a função $\mathrm{sen}(x)$ é injetora no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagem o intervalo $[-1, 1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \mathrm{arcsen}(x)$, para $x \in [-1, 1]$, dada por

$$\boxed{y = \mathrm{arcsen}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}(y) = x.}$$

Gráficos seno e arco-seno



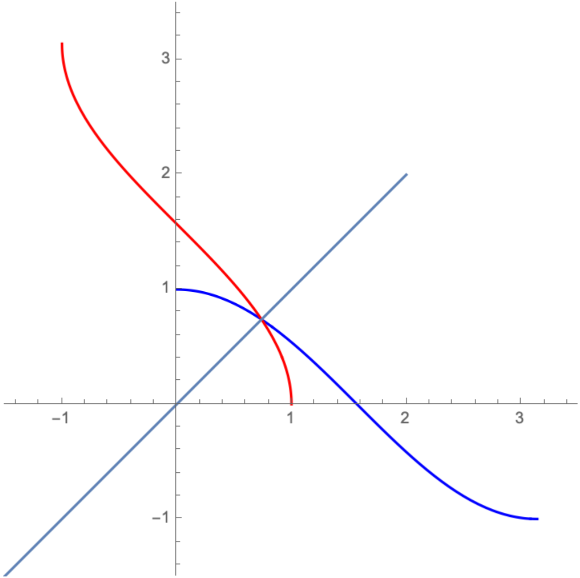
Exemplo

A inversa da função $f(x) = \cos(x)$, para $x \in [0, \pi]$, é a função $g(x) = \arccos(x)$, para $x \in [-1, 1]$.

Solução: Observe que a função $\cos(x)$ é injetora no intervalo $[0, \pi]$ com imagem o intervalo $[-1, 1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \arccos(x)$, para $x \in [-1, 1]$, dada por

$$\boxed{y = \arccos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x.}$$

Gráficos cosseno e arco-cosseno

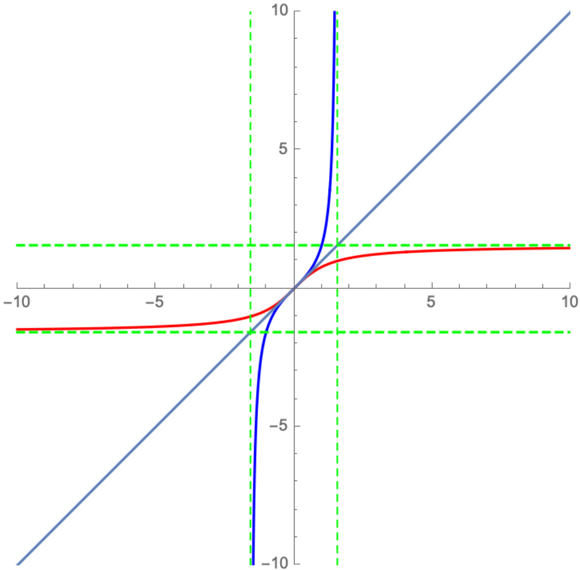


Exercício: Definição das outras inversas trigonométricas:

(a) $\mathrm{arctg}(x)$;	(b) $\mathrm{arccotg}(x)$;
(c) $\mathrm{arcsec}(x)$;	(d) $\mathrm{arccossec}(x)$

- Para (a) considere a função $\mathrm{tg}(x)$ definida no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$
- Para (b) considere a função $\mathrm{cotg}(x)$ definida no intervalo $(0, \pi)$
- Para (c) considere a função $\sec(x)$ definida em $[0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$
- Para (d) considere a função $cossec(x)$ definida em $(0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

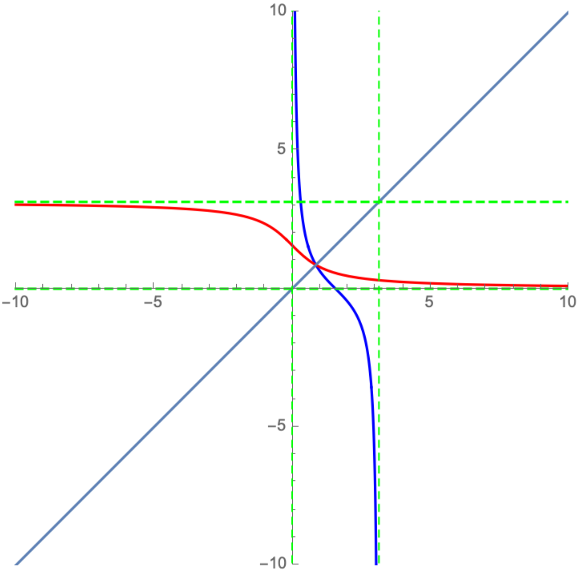
Gráficos tangente e arco-tangente



Gráficos tangente e arco-tangente

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

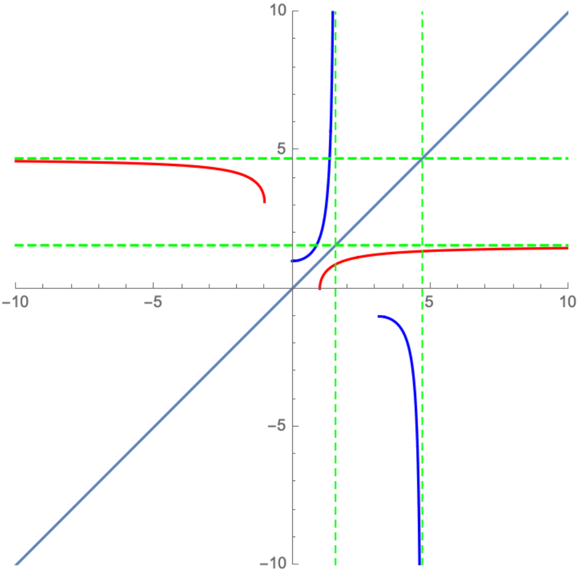
Gráficos cotangente e arco-cotangente



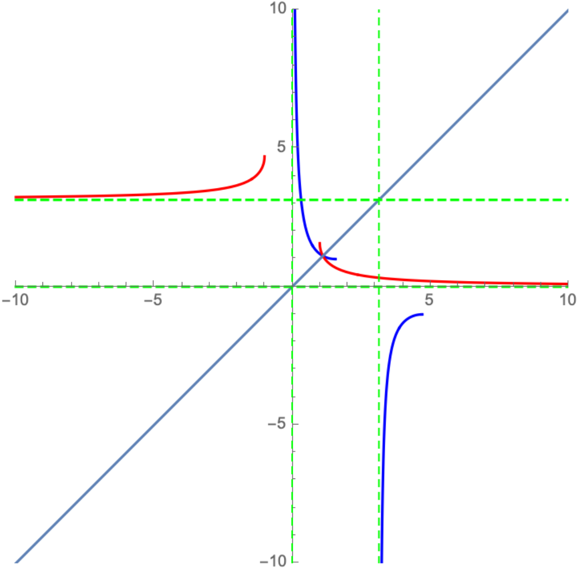
Gráficos cotangente e arco-cotangente

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$$

Gráficos secante e arco-secante



Gráficos cossecante e arco-cossecante



Exemplo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $\bar{x}$ um ponto de máximo (mínimo) de f.

$$\text{Se } \bar{x} \in (a, b), \text{ e } \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \text{ existe, então } L = 0.$$

Diremos que L, quando existir, será a derivada f em $\bar{x}$ e escreveremos $L =: f'(\bar{x})$.

De fato: Como $f(x) \leq f(\bar{x})$ para todo $x \in [a, b]$ e como $\bar{x} \in (a, b)$ temos do Teorema da Comparação que

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = L \geq 0.$$

Logo $L = 0$.$\square$

Exemplo

Seja $f(x) = x^3 - 3x + 4$*, encontre os candidatos a pontos de máximo e mínimo locais de* f*.*

Solução: Vamos procurar por pontos $\bar{x}$ tais que

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}} (x^2 + x\bar{x} + \bar{x}^2 - 3) = 3(\bar{x}^2 - 1) = 0.$$

Ou seja $\bar{x} = 1$ ou $\bar{x} = -1$. Veremos mais tarde que $\bar{x} = 1$ é um mínimo local enquanto que $\bar{x} = -1$ é um máximo local.

Exercício

Explore essa idéia para uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Conclua que, se* $a > 0$ $(a < 0)$*,* f *assume o seu mínimo (máximo) em* $-b/2a$

Motivação para derivada

Seja $x = f(t)$ uma equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta real x. Então $f(t)$ descreve a posição da partícula no instante t, para cada $t \in \mathbb{R}$.

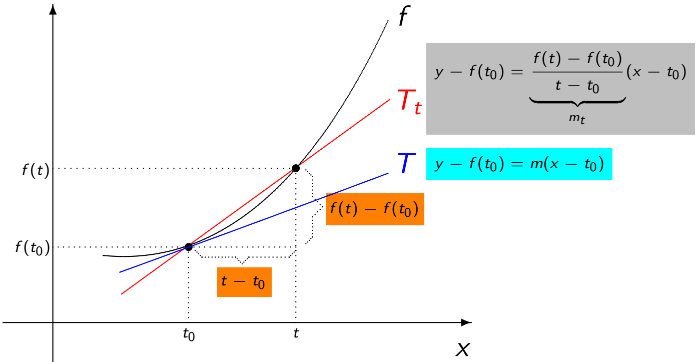
A **velocidade média** da partícula entre os instantes t_0 e t é dada por

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

e a **velocidade instantânea** ou simplesmente **velocidade** da partícula no instante t_0 é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Consideremos a seguinte figura.



Notemos que, quando t se aproxima de t_0, a reta T_t "tende" a ocupar a posição da reta T, ou seja, o coeficiente angular m_t, da reta T_t, tende para o valor do coeficiente angular m, da reta T.

Logo, $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \to m$, quando $t \to t_0$, ou $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = m = v(t_0)$.

Fazendo a mudança de variável $t = t_0 + h,$ temos

$$t \to t_0 \Leftrightarrow h \to 0.$$

Portanto a equação (1) pode ser reescrita como

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Agora, podemos dar a definição seguinte.

Definição

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$ *um ponto de acumulação de* D_f.

- *Se existir o limite* $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \in \mathbb{R}$, *diremos que* L *é a* **derivada** *de* f *em* p *e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

- *Se* f *admitir derivada* $f'(p)$ *em* p, *diremos que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável em** p.
- *Se* f *admitir derivada em todo ponto de* $A \subset D_f$, *diremos que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável em** $A \subset D_f$. *Se* $A = D_f$, *diremos simplesmente que* f *é* **derivável** *ou* **diferenciável**.

Exemplo (A)

Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. *Então*

$$(a)\ f'(0) = 0; \quad (b)\ f'(2) = 8; \quad (c)\ f'(p) = 4p.$$

Solução: Por definição

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2h = 0,$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(4+4h+h^2) - 8}{h} = \lim_{h\to 0} (8+2h) = 8,$$

e em geral, para qualquer p,

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(p+h)^2 - 3 - (2p^2 - 3)}{h} = \lim_{h\to 0} (4p + 2h) = 4p.$$

Exemplo

Mostre que $f(x) = |x|$ *não é derivável em 0.*

De fato: Verifiquemos que $f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ não existe.

Calculando os limites laterais, temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Portanto não existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$, ou seja, não existe $f'(0)$.

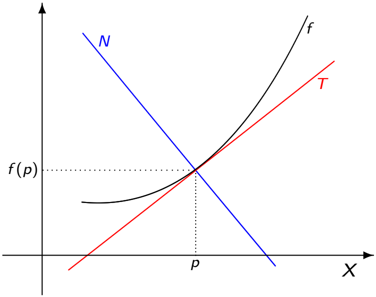
Conforme vimos, podemos interpretar a derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função.

Definição (Reta Tangente e Reta Normal)

*Se f é diferenciável em p, a **reta tangente** ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ é dada por*

$$y = f(p) + f'(p)(x - p) \qquad \textit{(Equação da reta tangente).}$$

*Definimos a **reta normal** ao gráfico de $y = f(x)$ em $(p, f(p))$ como a reta por este ponto que é perpendicular à reta tangente.*



Se $f'(p) = 0$, $x = p$ é a reta normal.

Se $f'(p) \neq 0$, temos que as retas não-verticais por $(p, f(p))$ são da forma $y = f(p) + a(x - p)$ onde a é o coeficient linear. Neste caso, a reta normal é tal que $a \cdot f'(p) = -1$, i.e.,

$$y = f(p) - \frac{1}{f'(p)}(x - p) \qquad \text{(Equação da reta normal).}$$

Exemplo (A - Continuação)

Seja $f(x) = 2x^2 - 3$. Determine a equação da reta ***tangente*** *e da reta* ***normal*** *ao gráfico de f nos pontos*

$$(a)\ (0, f(0)); \qquad (b)\ (2, f(2)).$$

Solução:

(a) reta tangente é $y = -3$ e a reta normal é $x = 0$.

(b) Já vimos que $f'(2) = 8$. Portanto, a equação da

reta tangente é $y - 5 = 8(x - 2)$ e a equação da

reta normal é $y - 5 = -\frac{1}{8}(x - 2)$.

Exemplo

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^2 - 3$ *e paralela à reta* $y = 2x + 3$.

Pela condição de paralelismo, devemos ter que

$$f'(p) = 2 \quad \text{ou} \quad 4p = 2, \quad \text{logo} \quad p = \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação da reta tangente é

$$y - f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right), \qquad \text{ou seja} \qquad y + \tfrac{5}{2} = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right).$$

Uma outra interpretação da derivada é como uma taxa de variação.

Consideremos, novamente, o problema de uma partícula que se desloca sobre o eixo x segundo a equação horária $x = f(t)$.

Definimos a velocidade instantânea como o limite das velocidades médias em intervalos cada vez menores.

Deste modo, a **velocidade instantânea** da partícula no instante t é

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

De maneira análoga, a **aceleração média** da partícula entre os instantes t e $t+\Delta t$ é dada por

$$\boxed{\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t},}$$

onde $v(t+\Delta t)-v(t)$ é a variação da velocidade entre os instantes t e $t+\Delta t$, e a **aceleração instantânea** ou simplesmente **aceleração** da partícula no instante t é dada por

$$\boxed{a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=v'(t)=f''(t).}$$

Exemplo

Uma partícula move-se sobre o eixo x de modo que, no instante t, a posição x é dada por $x = t^2,\ t \geq 0,$ onde t é dado em segundos e x é dado em metros.

(a) *Qual a velocidade da partícula no instante t?*

(b) *Qual a aceleração da partícula no instante t?*

Solução: A velocidade é a derivada da função posição, logo

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t,$$

e a aceleração é a derivada da velocidade,

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h) - 2t}{h} = 2.$$

Suponhamos agora que uma quantidade y depende de outra quantidade x, de modo que y é uma função de x, ou seja $y = f(x)$. A **taxa média de variação** de f entre x e $x + \Delta x$ é dada por

$$\boxed{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},}$$

A **taxa de variação** (instantânea) de f em x é dada por

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

e coincide com a derivada $f'(x)$ de f em x.

Observação: A taxa de variação tem uma interpretação específica dependendo da ciência à qual se refere. A seguir alguns exemplos:

- Suponha que a massa m de uma barra não homogênea seja uma função do comprimento, $m = f(x)$. Então definimos a **densidade linear** ρ como taxa de variação da massa em relação ao comprimento, ou seja, $\rho(x) = f'(x)$.

- Se um gás é mantido a uma temperatura constante, o volume V ocupado é uma função da pressão P, isto é, $V(P)$. Consideramos a taxa de variação do volume em relação à pressão, ou seja, $V'(P)$. A **compressibilidade isotérmica** é definida por $\beta = -\frac{V'(P)}{V}$.

- Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t. Então a taxa de variação da população com relação ao tempo $f'(t)$ é chamada **taxa de crescimento**.

- Suponha que $C(x)$ seja o custo total da produção de x unidades de um produto dado. A taxa de variação do custo em relação ao número de ítens produzidos $C'(x)$ é chamado de **custo marginal**.