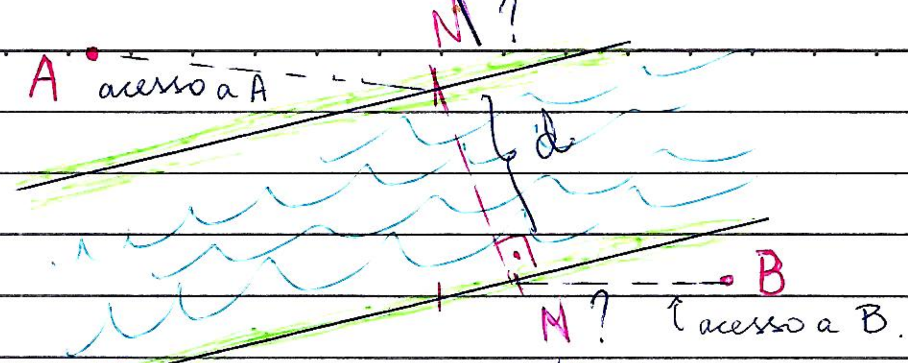
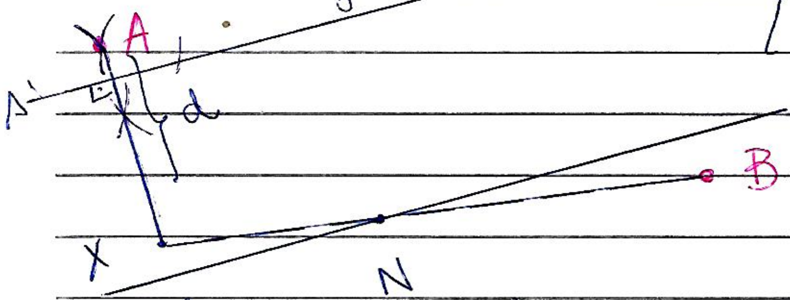
Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom   / /

E15
L1



Duas cidades A e B estão separadas por um rio cujas margens são retas paralelas. Qual a $\boxed{\text{localização ideal}}$ para a construção de uma ponte perpendicular às margens do rio e seus acessos às duas cidades?

Localização ideal $\Leftrightarrow$ { percurso de menor distância entre A e B



(r e s : margens)

Observando a figura acima queremos: a soma

1º $AM + MN + NB$: mínima

como na figura acima onde MN é constante e igual a d, pois é o comprimento da ponte (distância entre retas paralelas).

Considero a ponte translada ao ponto A, com comprimento d; a "ponte" tem extremos A e X tq $AX = d$ = compr da ponte. Agora seja:

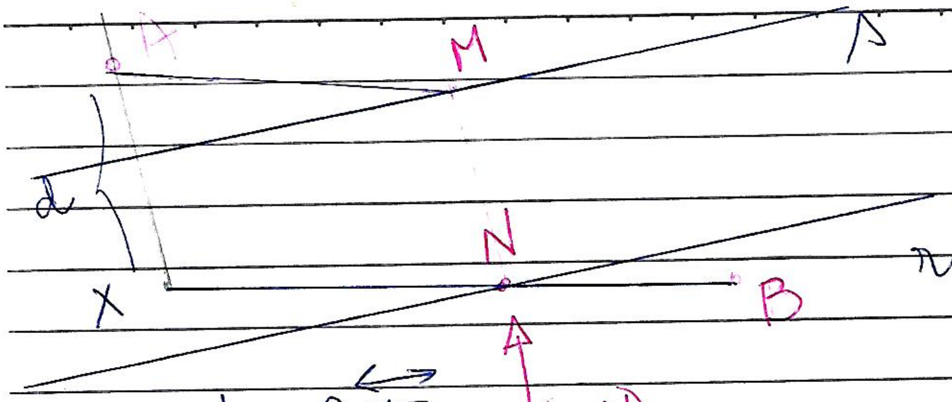
$$N = r \cap \overleftrightarrow{XB}$$

e seja $M \in s$ / $MN \perp r$ e ($\therefore MN = d$).

Na figura teremos $\overline{MN} \parallel \overline{AX}$ e $MN = AX$. Logo AXNB é paralelogramo $\Rightarrow$ $AM = XN$.

Daí ...

Seg | Ter | Qua | Qui | Sex | Sáb | Dom   / /



$X \mid \overline{AX} \perp \begin{cases} r \\ s \end{cases}$ e $AX = d$

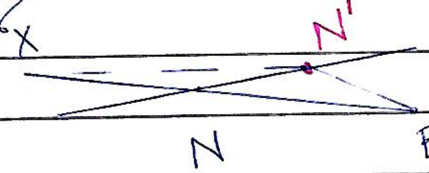
$N = r \cap \overleftrightarrow{XB}$ (1º N)

$M \in s \mid \overline{MN} \perp \begin{cases} r \\ s \end{cases}$ e $MN = d$ $\therefore \begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{AX} \\ MN = AX \end{cases}$

$\Rightarrow AXNM$ é paralelogramo $\Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} \parallel \overline{XN} \\ AM = XN \end{cases}$

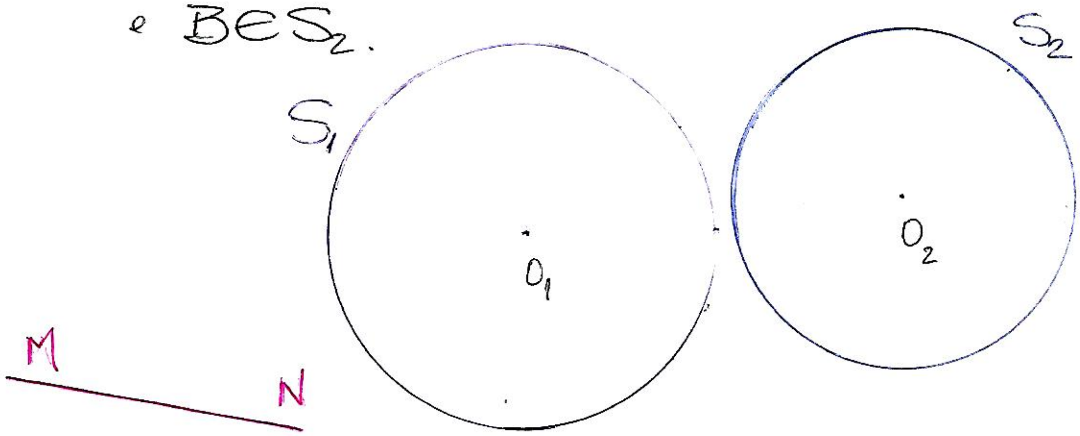
Temos:

$$AM + MN + NB = \overbrace{MN}^{d} + AM + NB =$$
$$= \underbrace{MN}_{d} + \underbrace{XN + NB}_{(< XN' + N'B)}$$ é a menor distância possível.



$XN + NB < XN' + N'B$
pois $X - N - B$.

E7L2 Dadas duas circunferências S_1 e S_2 e um segmento $\overline{MN}$, determine um segmento $\overline{AB}$ paralelo e congruente a MN, $A \in S_1$ e $B \in S_2$.



Seja $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. Queremos $\overline{AB}$, $\overline{AB} // \overline{MN}$ e $AB = MN$

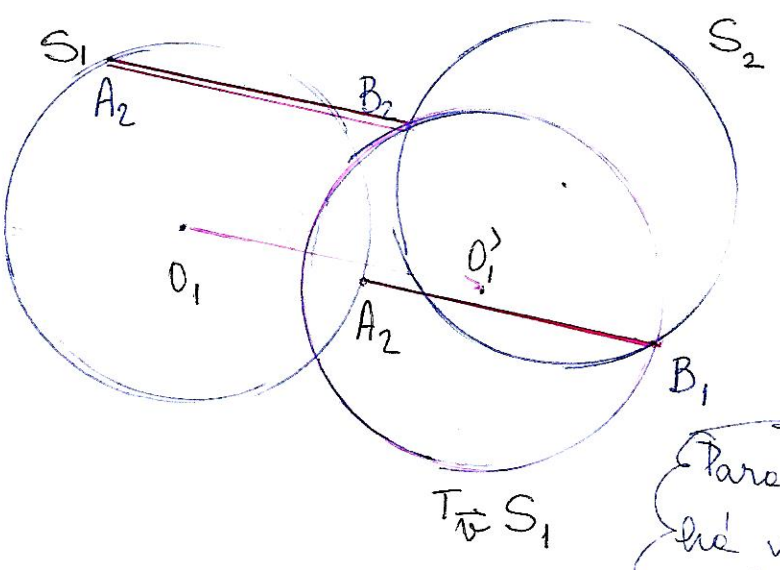
Logo devemos ter $B = T_{\vec{v}} A$ ou $B = T_{-\vec{v}} A$.

com $A \in S_1$ e $B \in S_2$. Para $B = \underbrace{T_{\vec{v}} A}_{\in T_{\vec{v}} S_1}$ devemos ter $B \in (T_{\vec{v}} S_1) \cap S_2$.

Para $B \in T_{-\vec{v}} A$, devemos ter $B \in S_2 \cap T_{-\vec{v}} S_1$.

Esboremos $T_{\vec{v}} S_1$ p/ encontrar sua(s) intersecções com S_2.

$T_{\vec{v}} S_1$ tem centro O_1' e raio igual ao de S_1.



Encontramos os pontos B_1 e B_2 e daí fazemos

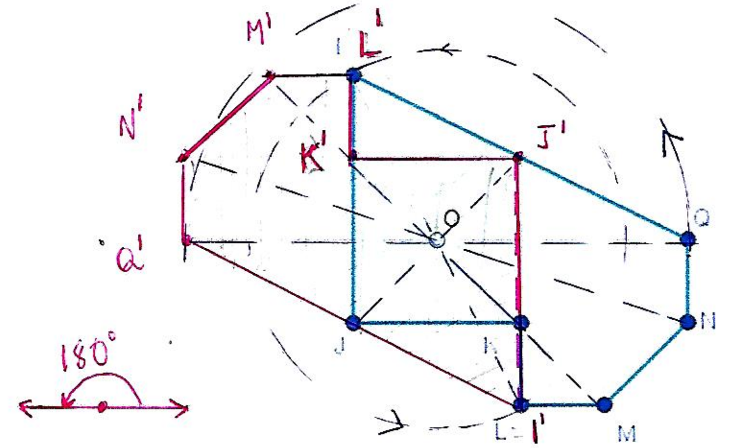
$A_1 = T_{-\vec{v}} B_1$

$A_2 = T_{-\vec{v}} B_2$.

Para $B \in T_{-\vec{v}} S_1$, não há intersecção com S_2 neste desenho.

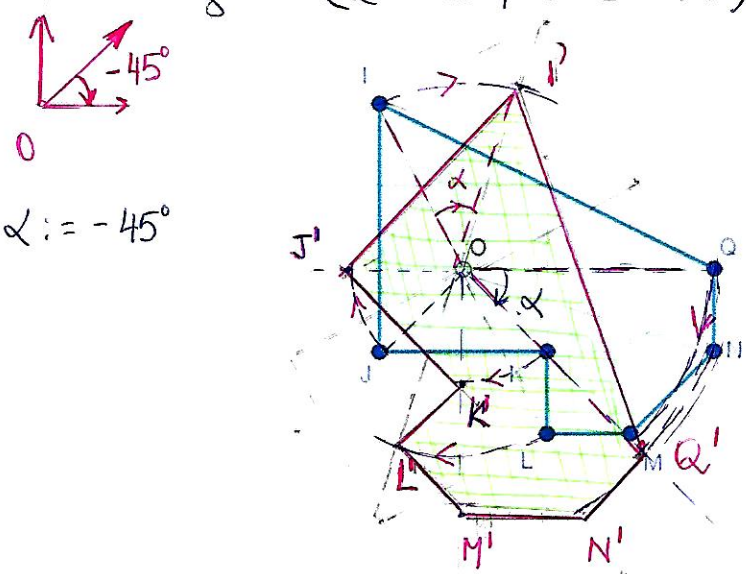
Os segmentos $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são as soluções do problema.

E3L3: A primeira rotação é um bom exemplo para observar que $R_{O,\pi} = R_O$: reflexão com centro O. Os pontos do polígono original são simétricos aos da imagem em relação a O.



As figuras IJKLMNQ e sua imagem são simétricas em relação a O.

Na segunda rotação o ângulo de 45° é obtido em quadrado da malha ABCD como ∢ entre lado e diagonal (AC ou BD). Para orientar o aluno a produzir a imagem (é difícil!!!) lembre-o



de que $R_{O,\alpha}$ preserva forma e distância. Em particular preserva perpendicularismo e paralelismo.

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom   / /

$\boxed{E7L3}$ Que pontos ficam fixados por uma rotação $R_{O,\alpha}$?

• Se $\alpha \neq 0$:

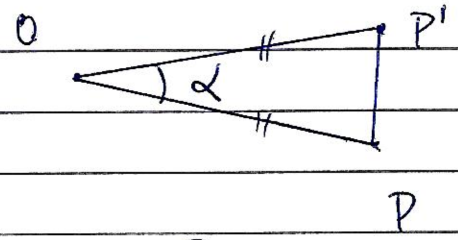
- Somente o centro O
  - Por definição, O é ponto fixo de $R_{O,\alpha}$

  - Se $P \neq O$:

  Temos, por definição:

• $P' = R_{O,\alpha}(P)$ é tal que $OP' = OP > 0$

• Além disso $med(\measuredangle(\widehat{POP'})) = \alpha \neq 0 \Rightarrow$ OP' e OP estão em semirretas distintas. Essas duas condições determinam que P, O e P' são vértices de um triângulo isósceles e $\therefore P' \neq P$.



• Se $\alpha = 0$: $R_{O,\alpha}$ é a identidade e fixa todos os pontos do plano.

Que conjuntos ficam fixados por $R_{O,\alpha}$?

Assumo $\alpha \neq 0$: de centro O (!!)

Circunferências ficam fixadas por $R_{O,\alpha}$

Seja S circunf de centro O. Por definição, sendo $P' = R_{O,\alpha}(P)$ temos $OP' = OP$ e portanto $P' \in S$. Assim $R_{O,\alpha}(S) \subset S$.

FORONI

Agora denotando $S' = R_{O,\alpha}(S)$, temos analogamente:

$$R_{O,-\alpha}(S') \subset S \text{ e disto segue}$$

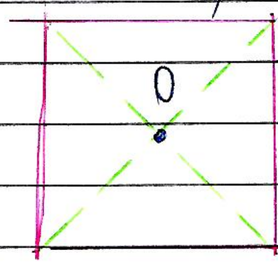
~~$R_{O,\alpha}(S$~~: $R_{O,\alpha} \circ R_{O,-\alpha}(S') \subset R_{O,\alpha} S$.

Portanto: $R_{O,\alpha}(S) = S$.

Outros conjuntos tb?

Para ângulos notáveis, sim!

Q: quadrado
O: encontro das diagonais



$R_{O,\frac{\pi}{2}}(Q) = Q$

$R_{O,\pi}(Q) = Q$.

Para triângulo equilátero?

Outros polígonos regulares?

E6L3 | $R_{O,\alpha}$ é isometria.

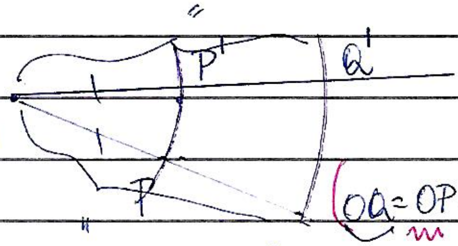
Assumo $\alpha \neq 0$.

Sejam P e Q pontos do plano $P' = R_{O\alpha}P$, $Q' = R_{O\alpha}Q$.

Queremos mostrar que $P'Q' = PQ$.

• Se P e Q são colineares com O, podemos ter:

i) $O - P - Q$

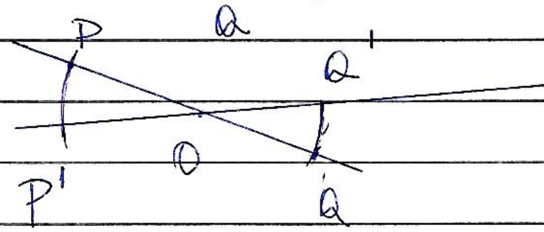


$OP' = OP$ (*) $\Rightarrow P'Q' = PQ$.

$OQ' = OQ$

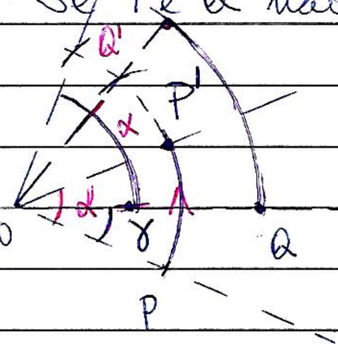
$(OQ = OP + PQ = OP' + P'Q' = OQ')$ (*)

ii) $P - O - Q$



$OP = OP'$ $OQ = OQ'$ $P'Q' = OP' + OQ' = OP + OQ = PQ$.

• Se P e Q não são colineares com O



Olhando os ângulos:

$\gamma : P\hat{O}Q$

$P\hat{O}P' = \alpha$ $Q\hat{O}Q' = \alpha$ $> QOP' = \alpha - \gamma$

$\Rightarrow Q'OP' = \alpha - (\alpha - \gamma) = \gamma$

Daí $OQ' = OQ$,
$Q'\hat{O}P' = Q\hat{O}P$ $\xRightarrow{LAL}$ $\Delta Q'OP'$ é congruente
$OP' = OP$ ao ΔQOP

$\xRightarrow{\text{3º lado é congruente}}$ $P'Q' = PQ$.