1. Seja
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 3. \end{cases}$$
   (a) Encontre de série de Fourier em cossenos de ϕ.
   (b) Para cada $x \in [0, 3]$, qual é a soma desta série?
   (c) Esta série converge para ϕ no sentido L^2? Por quê?
   (d) Faça $x = 0$ para encontrar a soma da série numérica
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \ldots$$

2. Seja
$$\phi(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{se } \quad -1 < x < 0, \\ 1 - x & \text{se } \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$
   (a) Encontre de série de Fourier completa de ϕ.
   (b) Esta série converge para ϕ no sentido L^2?
   (c) Esta série converge pontualmente?
   (d) Esta série converge uniformemente?

3. Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função que tem derivada f' continua e satisfaz as condições de fronteira periódicas $(f(-L) = f(L)$ e $f'(-L) = f'(L))$. Sejam a_n e b_n os coeficientes de Fourier de f e a'_n e b'_n os coeficientes de Fourier de f'.
   (a) Mostre que
$$a'_n = \frac{n\pi b_n}{L} \quad \text{e} \quad b'_n = -\frac{n\pi a_n}{L} \quad \text{para } n \neq 0.$$
   (b) Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que
$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{K}{n} \quad \text{para } n \neq 0.$$

4. (Integração termo a termo de séries de Fourier)
   (a) Se f é uma função contínua por partes em $[-L, L]$, mostre que a função $F(x) = \int_{-L}^{x} f(s)\, ds$, definida em $[-L, L]$, tem série de Fourier completa que converge pontualmente para $F(x)$ para todo $x \in [-L, L]$
   (b) Escreva a série de Fourier de F explicitamente em termos dos coeficientes de Fourier de f. (Dica: aplique um teorema de convergência. Escreva as fórmulas para o coeficientes e integra por partes.)
   (c) Conclua a propriedade sobre a integração termo a termo de séries de Fourier.

5. Considere a solução da equação da onda com $c = 1$ no intervalo $[0, L]$ com condições de fronteira de Dirichlet ou de Neumann.
   (a) Mostre que a energia $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L (u_t^2 + u_x^2)\, dx$ é constante.
   (Sugestão: multiplique a equação da onda por u_t e integre com relação a x no intervalo $[0, L]$.)
   (b) Seja $E_n(t)$ a energia do n-ésimo harmônico (o n-ésimo termo na expansão da solução). Mostre que $E = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n$.
   (Sugestão: primeiro escreva o n-ésimo harmônico como $u_n(x, t) = \alpha_n \sin(n\pi t/L + \theta_n) \sin(n\pi x/L)$ no caso Dirichlet ou $u_n(x, t) = \alpha_n \sin(n\pi t/L + \theta_n) \cos(n\pi x/L)$ no cado Neumann, onde $\alpha_n = (a_n + b_n)^{1/2}$ e $\theta_n = \arctan a_n/b_n$.)

6. Mostre a desigualdade de Schwarz para qualquer par de funções:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \, \|g\|.$$

(Dica: considere a expressão $\|f + tg\|^2$, onde t é um escalar. Esta expressão é um polinômio quadrático de t. Encontre o valor de t onde ele tem um mínimo. Manipule e a desigualdade de Schwarz aparecerá.)

7. Mostre a desigualdade de Schwarz para séries:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2}$$

(Dica: Veja a dica no Exercício 5. Prove primeiro para somas parciais finitas e depois tome o limite.)

8. Considere a equação de difusão em $[0, L]$ com condições de fronteira de Dirichlet e qualquer função contínua como condição inicial. Mostre pela expansão em série que a solução é infinitamente diferenciável para $t > 0$.

9. Mostre que se f é uma função C^1 em $[-\pi, \pi]$ que satisfaz as condições de fronteira periódicas (veja Exercício 3) e se $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, então

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

(Dica: Use identidade de Parseval.)