

Um pouco sobre conjuntos bem ordenados

Proposição 1: Sejam A e B conjuntos bem ordenados e $h : A \longrightarrow B$ um isomorfismo entre A e B . Se $a \in A$ então $a^{\rightarrow}$ é isomorfo a $h(a)^{\rightarrow}$.

Demonstração: Como $h : A \longrightarrow B$ é um isomorfismo, vale que $h|_{a^{\rightarrow}} : a^{\rightarrow} \longrightarrow h(a)^{\rightarrow}$ é um isomorfismo. Para obter o resultado enunciado, basta provar que $h(a^{\rightarrow}) = h(a)^{\rightarrow}$.

Seja $y \in B$. Temos:

$y \in h(a^{\rightarrow}) \Leftrightarrow$ existe $x < a$ tal que $y = h(x)$.

Como h é isomorfismo, vale que $x < a \Leftrightarrow h(x) < h(a) \Leftrightarrow y < h(a) \Leftrightarrow y \in h(a)^{\rightarrow}$, e portanto, $h(a^{\rightarrow}) = h(a)^{\rightarrow}$. $\triangle$

Proposição 2: Seja $(W, \leq)$ um conjunto bem ordenado. Se $f : W \longrightarrow W$ é uma função estritamente crescente então $x \leq f(x)$, $\forall x \in W$.

Demonstração: Seja $S = \{x \in W : f(x) < x\}$, e suponhamos que $S \neq \emptyset$. Como W é bem ordenado, existe $a = \min S$. Por sua vez,

$a \in S \Rightarrow f(a) < a \Rightarrow f(f(a)) < f(a)$ (pois f é estritamente crescente).

Mas $f(f(a)) < f(a) \Rightarrow f(a) \in S$: contradição, pois a é mínimo de S e $f(a) < a$.

Logo, $S = \emptyset$ e vale o resultado. $\triangle$

Proposição 3: Se $(W, \leq)$ é um conjunto bem ordenado então W não é isomorfo a nenhum segmento inicial de si próprio.

Demonstração: Suponhamos $a \in W$ e $f : W \longrightarrow a^{\rightarrow}$ um isomorfismo. Então f é estritamente crescente e, pela proposição anterior, devemos ter $x \leq f(x)$, $\forall x \in W$. Em particular, deve ocorrer $a \leq f(a)$. Mas $f(a) \in a^{\rightarrow}$, e portanto, $f(a) < a$: contradição. Logo, W não pode ser isomorfo a $a^{\rightarrow}$, que é um seu segmento inicial. $\triangle$

Proposição 4: Se $(W, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, o único automorfismo de W é a identidade.

Demonstração: Seja $f : W \longrightarrow W$ um automorfismo. Então f é um isomorfismo, e portanto, é estritamente crescente. Da mesma forma, f^{-1} é um isomorfismo, e também é estritamente crescente. Pela proposição anterior, temos:

$$\begin{cases} x \leq f(x) & \forall x \in W \\ x \leq f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) \leq x & \forall x \in W \end{cases}$$

Logo, $f(x) = x$, $\forall x \in W$. $\triangle$

Proposição 5: Sejam W_1 e W_2 conjuntos bem ordenados, e considere as seguintes afirmações:

- (a) W_1 é isomorfo a W_2 .
- (b) W_1 é isomorfo a um segmento inicial de W_2 .
- (c) W_2 é isomorfo a um segmento inicial de W_1 .

Não é possível que ocorra duas das propriedades listadas acima simultaneamente para W_1 e W_2 .

Demonstração: Suponhamos que aconteça (a) e (b). Então existe $b \in W_2$ tal que

$$W_1 \sim W_2 \quad \text{e} \quad W_1 \sim b^{\rightarrow}$$

Então teremos $W_2 \sim b^{\rightarrow}$, e W_2 será isomorfo a um seu segmento inicial, o que contraria a proposição 3.

Analogamente concluímos que não pode ocorrer simultaneamente (a) e (c).

Suponhamos, pois, que aconteçam as afirmações (b) e (c). Então existem $a \in W_1$ e $b \in W_2$ tais que

$$W_1 \sim b^{\rightarrow} \quad \text{e} \quad a^{\rightarrow} \sim W_2.$$

Seja $h : W_1 \rightarrow b^{\rightarrow}$ um isomorfismo. Como $a \in W_1$, vale que $a^{\rightarrow} \sim h(a)^{\rightarrow} \subseteq b^{\rightarrow} \subseteq W_2$.

Então temos:

$$\left. \begin{array}{l} a^{\rightarrow} \sim h(a)^{\rightarrow} \subseteq W_2 \\ a^{\rightarrow} \sim W_2 \end{array} \right\} \Rightarrow W_2 \sim h(a)^{\rightarrow}$$

e portanto, W_2 é isomorfo a um segmento inicial de si próprio, o que não é possível.

Assim, (b) e (c) não podem ocorrer simultaneamente. $\triangle$

Teorema : Dados $(W_1, \leq_1)$ e $(W_2, \leq_2)$ conjuntos bem ordenados, ocorre uma e apenas uma das seguintes possibilidades:

- (1) W_1 é isomorfo a W_2 .
- (2) W_1 é isomorfo a um segmento inicial de W_2 .
- (3) W_2 é isomorfo a um segmento inicial de W_1 .

Demonstração: Considere o seguinte conjunto:

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 : x^{\rightarrow} \sim y^{\rightarrow}\}$$

e vamos estudar as suas propriedades.

- (a) $f \neq \emptyset$, pois $(0_{W_1}, 0_{W_2}) \in f$, onde 0_{W_i} é o mínimo de W_i , $i = 1, 2$.

- (b) f é uma função, isto é: dados $x \in W_1$ e $y_1, y_2 \in W_2$, se $(x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f$ então $y_1 = y_2$.

$$\text{Com efeito: } \left. \begin{array}{l} (x, y_1) \in f \\ (x, y_2) \in f \end{array} \right\} \longrightarrow y_1^{\rightarrow} \sim y_2^{\rightarrow}$$

Suponhamos $y_1 < y_2$. Então $y_1^{\rightarrow} \subseteq y_2^{\rightarrow}$ e, sendo $y_1^{\rightarrow} \sim y_2^{\rightarrow}$, concluímos que $y_2^{\rightarrow}$ é isomorfo a um segmento inicial de si mesmo, o que não é possível. Analogamente verificamos que não se pode ter $y_2 < y_1$. Logo, $y_1 = y_2$, e f é função.

- (3) f é injetora: dados $x_1, x_2 \in W_1$ e $y \in W_2$, se $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$ então $x_1 = x_2$.

A demonstração é análoga à do item (b) e ficará como exercício para você.

- (4) f é estritamente crescente, isto é: dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ se $x_1 < x_2$ então $y_1 < y_2$.

Como $(x_2, y_2) \in f$, existe um isomorfismo $h : x_2^{\rightarrow} \longrightarrow y_2^{\rightarrow}$. Sendo $x_1 < x_2$, tem-se que $x_1 \in x_2^{\rightarrow}$. Como h é um isomorfismo, vale que $h(x_1^{\rightarrow}) = h(x_1)^{\rightarrow}$, e portanto, $x_1^{\rightarrow} \sim h(x_1)^{\rightarrow}$. Logo $(x_1, h(x_1)) \in f$. Como também temos $(x_1, y_1) \in f$ e f é função, resulta que $y_1 = h(x_1)$. Sendo $h(x_1) < y_2$, obtemos igualmente que $y_1 < y_2$.

Como W_1 e W_2 são conjuntos bem ordenados, vale que, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$, tem-se que $x_1 < x_2 \leftrightarrow y_1 < y_2$, e portanto, f é um isomorfismo entre o seu domínio e a sua imagem.

Vamos designar A o domínio da função f e por B a sua imagem. Então f é um isomorfismo entre A e B .

Vamos provar que $A = W_1$ ou $B = W_2$.

- (5) Se $A \neq W_1$ então A é um segmento inicial de W_1 .

De fato: seja $x \in A$ e suponhamos $z \in W_1$ com $z < x$. Vamos mostrar que $z \in A$. Como $x \in A$, existe $y = f(x)$ tal que $(x, y) \in f$, e portanto, $x^{\rightarrow} \sim y^{\rightarrow}$: existe um isomorfismo $h : x^{\rightarrow} \longrightarrow y^{\rightarrow}$. Como $z \in x^{\rightarrow}$ (pois $z < x$), tem-se que $h(z) \in y^{\rightarrow}$ e $h|_{x^{\rightarrow}} : x^{\rightarrow} \longrightarrow h(x)^{\rightarrow}$ é um isomorfismo. Logo, $(z, h(z)) \in f$, e portanto, $z \in A$. Assim, se $A \neq W_1$ então A é um segmento inicial de W_1 .

- (6) Se $B \neq W_2$ então B é um segmento inicial de W_2 .

De fato: seja $y \in B$ e suponhamos $z \in W_2$ com $z < y$. Vamos mostrar que $z \in B$. Como $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, e portanto, $x^{\rightarrow} \sim y^{\rightarrow}$: existe um isomorfismo $h : x^{\rightarrow} \longrightarrow y^{\rightarrow}$. Como $z \in y^{\rightarrow}$ (pois $z < y$), tem-se que $h^{-1}(z) \in x^{\rightarrow}$ e $h|_{y^{\rightarrow}} : y^{\rightarrow} \longrightarrow h(y)^{\rightarrow}$ é um isomorfismo. Logo, $(h^{-1}(z), z) \in f$, e $z \in B$. Assim, se $B \neq W_2$ então B é um segmento inicial de W_2 .

- (7) Suponhamos que $A \neq W_1$ e $B \neq W_2$. Então A e B são segmentos iniciais de W_1 e W_2 , respectivamente, e como W_1 e W_2 são bem ordenados, existem $a \in W_1$ e $b \in W_2$ tais que $A = a^{\rightarrow}$ e $B = b^{\rightarrow}$. Dessa forma, temos $a^{\rightarrow} \sim b^{\rightarrow}$, e resulta que $(a, b) \in f$.

Por sua vez, $(a, b) \in f \Rightarrow \begin{cases} a \in A = a^{\rightarrow} \Rightarrow a < a \\ b \in B = b^{\rightarrow} \Rightarrow b < b \end{cases}$ contradição. Logo, ou $A = W_1$ ou $B = W_2$, o que termina a demonstração. $\triangle$