

COMPARAÇÃO ENTRE TRATAMENTOS:

teste t para 2 amostras pareadas
e teste t para 2 amostras independentes

Ana Amélia Benedito Silva

Comparação entre tratamentos

Teste t para duas amostras pareadas

Exemplo – dieta para perda de peso

Exemplo 3 – dieta

- **Situação**

Um médico acredita que uma dieta de emagrecimento consegue produzir bons resultados em 2 meses.

- **Evidência amostral**

Para verificar se a dieta é eficiente, foram selecionados 9 pacientes aleatoriamente e pediu a elas que seguissem a dieta por 2 meses.

Antes de começar a dieta o médico pesou cada paciente e **depois** de 2 meses, pesou-as novamente.

Exemplo 3 – dados amostrais

paciente	Peso antes	Peso depois
1	77	80
2	62	58
3	61	61
4	80	76
5	90	79
6	72	69
7	86	90
8	59	51
9	88	81

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 1 – Determinar as hipóteses
- Passo 2 - Escolha da estatística do teste
- Passo 3 - Determinação da Região crítica
- Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais
- Passo 5 – Concluir pela aceitação ou rejeição de H_0 , comparando o valor obtido no Passo 4 com a Região de Aceitação ou com a Região Crítica.

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 1 – Determinar as hipóteses

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \mu_{\text{antes}} = \mu_{\text{depois}} \\ H_1 : \mu_{\text{antes}} \neq \mu_{\text{depois}} \end{array} \right.$$

Fixa-se $\alpha = 0,01$

μ_{antes} = média do peso da população de mulheres antes da dieta

μ_{depois} = média do peso da população de mulheres depois da dieta

Passos para realizar teste de hipóteses

- **Passo 2 - Escolha da estatística do teste**

- 1)Variável dependente**

peso (Kg)

- 2)Tipo da variável dependente**

quantitativa contínua

- 3)Relacionamento entre as amostras**

Dependentes ou relacionadas

- 4)N° de Amostras**

Duas

TABELA DE ORIENTAÇÃO NA ESCOLHA DE TESTES ESTATÍSTICOS

Tipo da variável dependente	Uma variável				Duas variáveis	
	Uma amostra	Duas amostras		Mais de duas amostras		Medidas de correlação
		<u>relacionadas</u>	<u>independentes</u>	<u>relacionadas</u>	<u>independentes</u>	
Qualitativa nominal ou ordinal	<u>binomial</u> ou <u>X²</u>	<u>McNemar</u>	X ² ou Fischer	Prova Q de <u>Cochran</u>	X ² para várias amostras	<u>coeficiente de contingência C</u>
Quantitativa discreta ou contínua (dados não seguem curva de Gauss)	Kolmogorov Smirnov	<u>Wilcoxon</u> ou Prova dos sinais	Mann-Whitney Ou Prova da Mediana	Prova de Friedman	<u>Kruskal-Wallis</u> ou Prova da mediana	<u>correlação de Spearman</u>
Quantitativa discreta ou contínua (dados seguem curva de Gauss)	Teste para média	<u>teste t de Student pareado</u>	<u>teste t de Student</u> para amostras independentes	ANOVA para medidas repetidas	ANOVA para grupos independentes	<u>correlação de Pearson</u>

Passos para realizar teste de hipóteses

- **Passo 2 - Escolha da estatística do teste**
- Para comparar as médias de 2 amostras pareadas utiliza-se o teste t pareado
- O teste t pareado segue uma distribuição chamada distribuição t de Student

Etapas para o cálculo do t pareado

- Passo 2 – Escolha da estatística do teste

Etapas para o cálculo do t pareado

- 1) calcular a diferença entre os valores de cada um dos n pares:

$$d = x_2 - x_1$$

- 2) calcular a média das diferenças

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n}$$

- 3) Calcular a variância

$$s^2 = \frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}$$

- 4) calcular o valor de t

$$t = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 3 - Determinação da Região crítica para $\alpha=1\%$

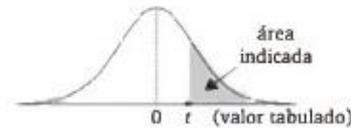
Para obtenção da região crítica precisamos calcular os graus de liberdade



Graus de liberdade = $9 - 1 = 8$

$t_{\text{crítico}} = 3,36$

Tabela 4 *Distribuição t de Student.*

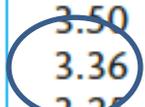


gl	Área na cauda superior								
	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,256	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819

Table A.2 The t -distribution



Value of t for a confidence interval of Critical value of $ t $ for P values of number of degrees of freedom	90% 0.10	95% 0.05	98% 0.02	99% 0.01
1	6.31	12.71	31.82	63.66
2	2.92	4.30	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.60
5	2.02	2.57	3.36	4.03
6	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.89	2.36	3.00	3.50
8	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.81	2.23	2.76	3.17
12	1.78	2.18	2.68	3.05
14	1.76	2.14	2.62	2.98
16	1.75	2.12	2.58	2.92
18	1.73	2.10	2.55	2.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85
30	1.70	2.04	2.46	2.75
50	1.68	2.01	2.40	2.68
∞	1.64	1.96	2.33	2.58



Atenção

The critical values of $|t|$ are appropriate for a *two-tailed* test. For a *one-tailed* test the value is taken from the column for *twice* the desired P -value, e.g. for a one-tailed test, $P = 0.05$, 5 degrees of freedom, the critical value is read from the $P = 0.10$ column and is equal to 2.02.

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 4 – Calcular a estatística do teste

paciente	Peso antes	Peso depois	Antes - depois
1	77	80	-3
2	62	58	4
3	61	61	0
4	80	76	4
5	90	79	11
6	72	69	3
7	86	90	-4
8	59	51	8
9	88	81	7

$$\sum d = 30 \text{ kg}$$

$$\bar{d} = 3,3 \text{ kg}$$

$$s^2 = 25\text{kg}^2$$

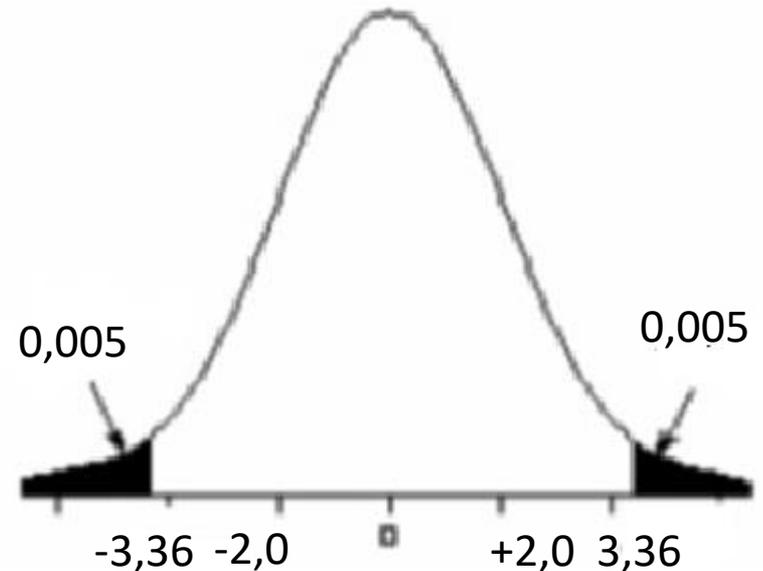
$$\mathbf{t = 2,0}$$

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 5 – Conclusão

Após obter-se o valor de t , compara-se est

$$t_{\alpha=1\%; \text{g.l.} = 9-1=8} = 3,36$$



Como $t_{\text{observado}} = 2,0 < t_{\text{tabelado}} = 3,36$, não rejeito H_0

Logo, há evidências, a um nível de significância de 1%, que a dieta não foi eficiente, ou seja, aceito H_0 .

Comparação entre tratamentos

Teste t para 2 amostras independentes

Exemplo – consumo de oxigênio
natação vs voleibol

Exemplo – técnico de voleibol

- **Situação**

Um técnico de voleibol acredita que o consumo máximo de oxigênio de jogadores de voleibol e nadadores seja diferente.

- **Evidência amostral**

Para testar a hipótese, o técnico de voleibol mediu o consumo máximo de oxigênio de 10 atletas da sua equipe e de 10 atletas de uma equipe de natação.

Exemplo – dados amostrais

	Consumo Máximo de Oxigênio (mL/(Kg.min))	
	Voleibol	Natação
	52,0	40,0
	49,0	38,0
	47,0	42,0
	48,0	40,0
	52,0	37,0
	53,0	36,0
	46,0	40,0
	54,0	36,0
	60,0	39,0
	59,0	37,0
média	52,0	38,5
desvio-padrão	4,8	2,0

Passos para realizar teste de hipóteses

- **Passo 1 - Determinação das Hipóteses estatísticas**

$H_0 : \mu_{\text{voleibol}} = \mu_{\text{natação}} \rightarrow \text{consumos iguais}$

$H_1 : \mu_{\text{voleibol}} \neq \mu_{\text{natação}} \rightarrow \text{consumos diferentes}$

Passos para realizar teste de hipóteses

- **Passo 2 – Escolha da estatística do teste**

- 1) Variável dependente**

consumo máximo de oxigênio

- 2) Tipo da variável dependente**

quantitativa contínua

- 3) Relacionamento entre as amostras**

Independentes – amostra de dados do voleibol e amostra de dados da natação

- 4) N° de Amostras**

2 independentes

TABELA DE ORIENTAÇÃO NA ESCOLHA DE TESTES ESTATÍSTICOS

Tipo da variável dependente	Uma variável				Duas variáveis	
	Uma amostra	Duas amostras		Mais de duas amostras		Medidas de correlação
		<u>relacionadas</u>	<u>independentes</u>	<u>relacionadas</u>	<u>independentes</u>	
Qualitativa nominal ou ordinal	<u>binomial</u> ou <u>X²</u>	<u>McNemar</u>	X ² ou Fischer	Prova Q de <u>Cochran</u>	X ² para várias amostras	<u>coeficiente de contingência C</u>
Quantitativa discreta ou contínua (dados não seguem curva de Gauss)	Kolmogorov Smirnov	<u>Wilcoxon</u> ou Prova dos sinais	Mann-Whitney Ou Prova da Mediana	Prova de Friedman	<u>Kruskal-Wallis</u> ou Prova da mediana	<u>correlação de Spearman</u>
Quantitativa discreta ou contínua (dados seguem curva de Gauss)	Teste para média	<u>teste t de Student</u> pareado	<u>teste t de Student</u> para amostras independentes	ANOVA para medidas repetidas	ANOVA para grupos independentes	<u>correlação de Pearson</u>

Passos para realizar teste de hipóteses

- **Passo 2 – Escolha da estatística do teste**
- Para comparar as médias de 2 amostras independentes utiliza-se o **teste t de Student**
- O teste t segue uma distribuição chamada distribuição t

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_a^2 \left[\left(\frac{1}{n_1} \right) + \left(\frac{1}{n_2} \right) \right]}}$$

$$s_a^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Usa distribuição *t* de Student com $gl = 2n - 2$ graus de liberdade

Teste t para duas amostras independentes

Estatística do teste

Se $n_1 = n_2 = n$:

$$s_a^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2}$$

$$t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \cdot \sqrt{\frac{n}{2s_a^2}}$$

n : tamanho da amostra em cada grupo;

\bar{x}_1 média da amostra 1

\bar{x}_2 média da amostra 2

s_1^2 variância da amostra 1

s_2^2 variância da amostra 2

s_a^2 variância agregada das duas amostras

Usa distribuição t de *Student* com $gl = 2n - 2$ graus de liberdade

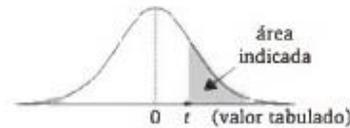
Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 3 - Determinação da Região crítica para $\alpha=5\%$

$$\begin{aligned} \text{graus de liberdade} &= n_1 - 1 + n_2 - 1 \\ \text{graus de liberdade} &= 18 \end{aligned}$$

$$R_c = \{ t \in T \mid |T| \geq 2,10 \}$$

Tabela 4 *Distribuição t de Student.*



gl	Área na cauda superior									
	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005	
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6	
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60	
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92	
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610	
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869	
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959	
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408	
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041	
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781	
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587	
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437	
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318	
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221	
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140	
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073	
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015	
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965	
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922	
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883	
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850	
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819	



Testes de Significância - Teste t de Student

Table A.2 The t -distribution



Value of t for a confidence interval of Critical value of $ t $ for P values of number of degrees of freedom	90% 0.10	95% 0.05	98% 0.02	99% 0.01
1	6.31	12.71	31.82	63.66
2	2.92	4.30	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.60
5	2.02	2.57	3.36	4.03
6	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.89	2.36	3.00	3.50
8	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.81	2.23	2.76	3.17
12	1.78	2.18	2.68	3.05
14	1.76	2.14	2.62	2.98
16	1.75	2.12	2.58	2.92
18	1.73	2.10	2.55	2.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85
30	1.70	2.04	2.46	2.75
50	1.68	2.01	2.40	2.68
∞	1.64	1.96	2.33	2.58



The critical values of $|t|$ are appropriate for a *two-tailed* test. For a *one-tailed* test the value is taken from the column for *twice* the desired P -value, e.g. for a one-tailed test, $P = 0.05$, 5 degrees of freedom, the critical value is read from the $P = 0.10$ column and is equal to 2.02.

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais

Etapas para o cálculo da estatística t

- 1) Calcular a média para as 2 amostras \bar{x}_1 e \bar{x}_2
- 2) Calcular a diferença entre as médias
- 3) Calcular a variância conjunta

$$s_a^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

s_1 : desvio-padrão amostra1; n_1 : tamanho amostra1;
 s_2 : desvio-padrão amostra2; n_2 : tamanho amostra2

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 4 – Calcular a estatística do teste para os dados amostrais

4) Calcular o valor da estatística T

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_a^2 \left[\left(\frac{1}{n_1} \right) + \left(\frac{1}{n_2} \right) \right]}}$$

Numerador = $(52,0 - 38,5) = 13,5$

$$s_a^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$S_a^2 = [(10-1)*23,04 + (10-1)*4,0] / (20-2) = 13,52$$

$$\text{Denominador} = \sqrt{13,52 * \left(\frac{2}{10} \right)} = 1,64$$

$$t_{\text{observado}} = 13,5 / 1,64 = \mathbf{8,22}$$

	Consumo de Oxigênio (mL/(Kg.min))	
	Voleibol	Natação
	52,0	40,0
	49,0	38,0
	47,0	42,0
	48,0	40,0
	52,0	37,0
	53,0	36,0
	46,0	40,0
	54,0	36,0
	60,0	39,0
	59,0	37,0
média	52,0	38,5
desvio-padrão	4,8	2,0
variância	23,04	4,0

$$\text{Numerador} = (52,0 - 38,5) = 13,5$$

$$S_a^2 = [(10-1)*4,8^2 + (10-1)*2,0^2] / (20-2) = 13,52$$

$$\text{Denominador} = \sqrt{13,52 \times \left(\frac{2}{10}\right)} = 1,64$$

$$\text{Logo: } t_{\text{observado}} = 13,5 / 1,64 = 8,22$$

Passos para realizar teste de hipóteses

- Passo 5 – Conclusão

Após obter-se o valor de t , compara-se este valor ao t da tabela

$$t_{\alpha=5\%; \text{ g.l.}=18} = 2,10$$

Como $t_{\text{observado}} = 8,22 > t_{\text{tabelado}} = 2,10$ devo rejeitar H_0

Logo, há evidências, a um nível de significância de 5%, que os consumos de oxigênio não são iguais.

obrigada