ONDAS

- Eq. de onda em 1 dim
- Resolvendo a eq. de onda
- Exemplos de ondas
  - ↳ ondas na corda
  - ↳ ondas sonoras em 1 dimensão
  - ↳ ondas sonoras em água e sólidos
  - ↳ ondas sonoras na atmosfera
  - ↳ ondas na superfície da água
- Condições de contorno
- Energia transportada na propagação:
  - ↳ corda vibrante
  - ↳ som em 1 dimensão
- Junção entre dois meios
- Eq. de onda em 3 dimensões

Ondas → estão em todas as partes

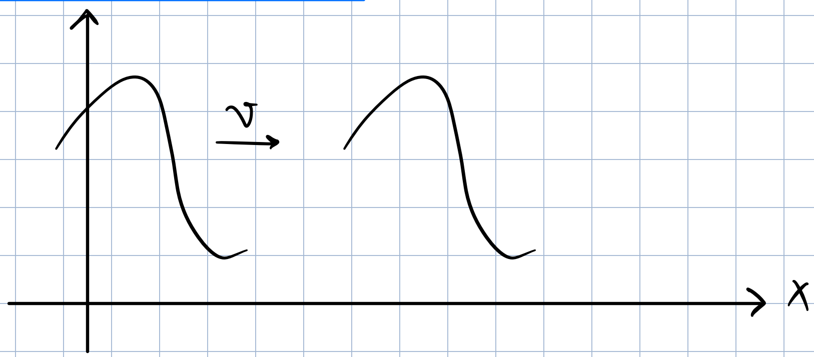
(som, terremotos, luz, rádio, água, ondas gravitacionais...)

→ podem carregar ENERGIA / MOMENTO LINEAR / MOMENTO ANGULAR sem transportar matéria

---

EQUAÇÃO DE ONDA EM 1 DIMENSÃO

Consideramos



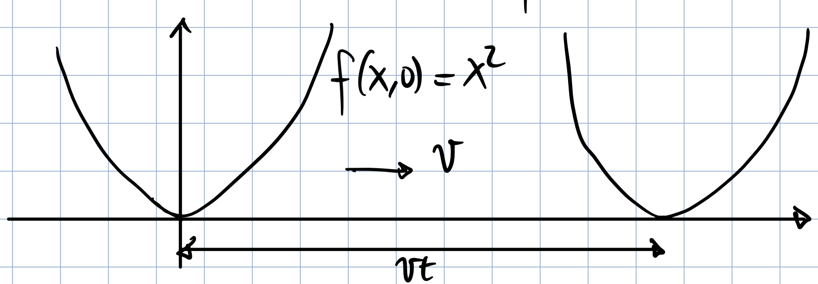
Precisamos de → função de x (forma da onda)

→ dependência temporal (propagação)

$\Rightarrow \quad f(x,t)$

Mas não todas $f(x,t)$ representam uma onda → a forma da onda $g(x) = f(x,t)\big|_{t=\text{fixo}}$ deve se manter, só que estará em lugares diferentes.

Exemplo simples : forma parabólica



depois do tempo t, o mínimo está em vt

$\Rightarrow \quad f(x,t) = (x-vt)^2$

$\Rightarrow$ IMPORTANTE: para descrever uma onda,

$$f(x,t) = f(x - vt, 0) \qquad (\text{propagação} \rightarrow)$$

Para inverter o sentido de propagação, $v \rightarrow -v$

$$\Downarrow$$

$f(x - vt)$ = onda se propagando para direita

$f(x + vt)$ = onda se propagando para esquerda

TODOS OS FENÔMENOS ONDULATÓRIOS OBEDECEM A MESMA EQ. DIFF., INDEPENDENTEMENTE DA QUANTIDADE FÍSICA REPRESENTADA POR f

$\rightarrow$ QUAL É ESSA EQ. DIFF.?

Def: $u = x \pm vt$, $f(x \pm vt) = f(u)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial u} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \pm v \frac{\partial f}{\partial t}$$

para eliminar o sinal (= para encontrar uma eq. diff. válida para ondas se propagando em ambas as direções)

derivamos novamente

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \pm v \frac{\partial}{\partial u}\left(\pm v \frac{\partial f}{\partial u}\right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

EQ. ONDA (= eq. diff. as derivadas parciais)

Veremos mais tarde qual o significado físico de f (depende do fenômeno).

RESOLVENDO A EQ. DE ONDA

Há várias técnicas para resolver uma eq. de onda.
Umas destas (dévida a Bernoulli) é a <u>técnica de separação de variáveis</u>

Idea : procuremos $f(x,t) = f_x(x)\, f_t(t) \neq 0$

Inserendo na função de onda :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f_t'' f_x = v^2 f_t f_x'' \Rightarrow \frac{f_t''}{f_t} = v^2 \frac{f_x''}{f_x}$$

depende apenas de t

depende apenas de x

$\Rightarrow$ derivando novamente respeito a t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f_t''}{f_t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(v^2 \frac{f_x''}{f_x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{f_t''}{f_t} = -\omega^2} = \text{const}$$

derivando novamente respeito a x:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_t''}{f_t}\right)}_{\overset{\parallel}{0}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 \frac{f_x''}{f_x}\right) \qquad \Rightarrow v^2 \frac{f_x''}{f_x} = -\omega^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f_x''}{f_x} = -\frac{\omega^2}{v^2} \equiv -k^2$$

(ω^2 e k^2 são apenas nomes convenientes)

Temos obtido 2 ODE de segunda ordem que sabemos resolver:

$$f_t(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)$$

$$f_x(x) = b_1 \cos(kx) + b_2 \sin(kx) \qquad k \equiv \omega v$$

$\rightarrow$ a solução mais geral será

$$f(x,t) = A_1 \cos(\omega t)\cos(kx) + A_2 \cos(\omega t)\sin(kx) + A_3 \sin(\omega t)\cos(kx) + A_4 \sin(\omega t)\sin(kx)$$

As constantes $A_{1,\dots,4}$ são determinadas pelas condições de contorno + condições iniciais.

A eq. $\boxed{\omega = kv}$ é chamada de RELAÇÃO DE DISPERSÃO

∃ um teorema (teorema de Fourier) que afirma que

qualquer solução da eq. de onda pode ser escrita como soma de modos normais (= oscilações fundamentais)

$$f(x \pm vt) = \sum_k \Big[A_k \cos(kx)\cos(\omega_k t) + B_k \cos(kx)\sin(\omega_k t) + C_k \sin(kx)\cos(\omega_k t) + D_k \sin(kx)\sin(\omega_k t) \Big]$$

$$\overset{t=0}{\Rightarrow} f(x) = \sum_k \Big(A_k \cos(kx) + C_k \sin(kx) \Big)$$

quando f satisfaz certas propriedades (é periódica, $f(x) = f(x+L)$ e quadrado integrável, $\int_0^L dx\, f^2(x)$ existe).

De fato, o que estamos vendo é o fato de que o espaço das soluções da eq. de onda é um espaço vetorial com base ortonormal (infinita) $\{\cos(kx), \sin(kx)\}$.

A ortonormalidade se dá respeito ao produto escalar

$$\int_0^L dx\, \sin(kx)\cos(k'x) = 0$$

Integrais importantes:

$$\int_0^L dx \, \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) = 0 = \int_0^L dx \, \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right)$$

$$\int_0^L dx \, \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) = \frac{L}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_0^L dx \, \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) = \frac{L}{2} \delta_{mn}$$

delta de Kronecker

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Na expansão para $f(x)$ (escrevendo $k = \frac{2\pi m}{L}$ por causa da periodicidade)

$$f(x) = \sum_m \left(A_m \cos\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) + C_m \sin\left(\frac{2\pi m}{L} x\right)\right)$$

podemos calcular A_m, C_m usando a ortonormalidade (como para o cálculo dos componentes de um vetor):

$$\int_0^L dx \, f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) = \sum_m A_m \int_0^L dx \, \cos\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) + C_m \underbrace{\int_0^L dx \, \sin\left(\frac{2\pi m}{L} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right)}_{=0}$$

$$= \sum_m \frac{L}{2} \delta_{mn} A_m = \frac{L}{L} A_n$$

+ análogo para calcular C_m.

Obs. importante: usando $\begin{cases} \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha \end{cases}$

podemos rescrever

$$f(x,t) = \sum_k \left[\alpha_k \cos(kx - \omega_k t + \varphi_1) + \beta_k \cos(kx + \omega_k t + \varphi_2) \right]$$

[mostre!]

<u>ondas harmonicas</u> (de extensão infinita)

k = número de onda $= \frac{2\pi}{\lambda}$ λ = comprimento de onda

ω_k = frequência $= \frac{2\pi}{T}$ T = período da onda

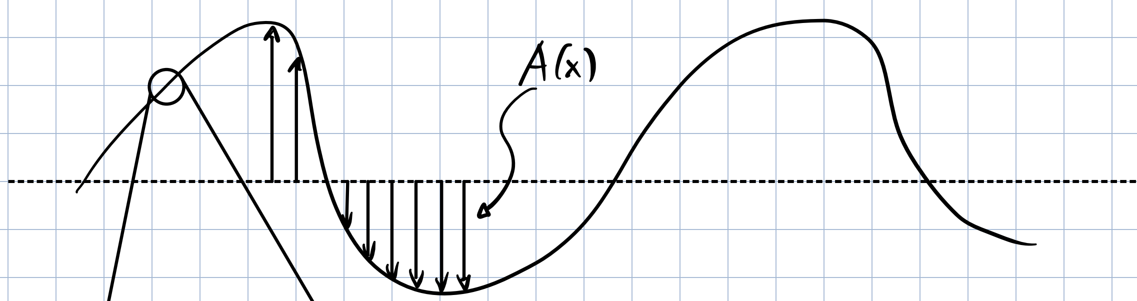
$\Rightarrow$ ondas periódicas podem sempre ser decompostas em combinações lineares de ondas harmonicas simples!

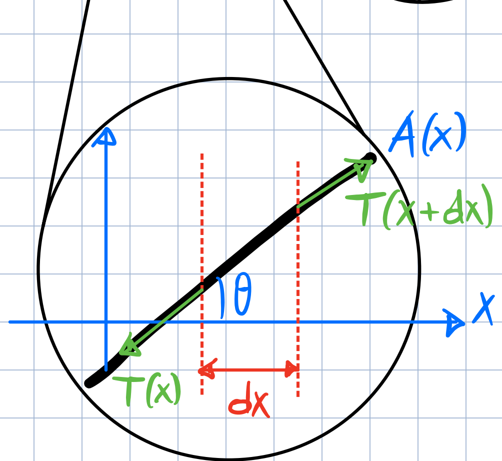
EXEMPLOS DE ONDAS EM DIFERENTES MEIOS

1. ONDAS EM UMA CORDA (EQ. CORDA VIBRANTE)

Vamos agora mostrar que ondas em uma corda satisfazem a eq. de onda e vamos calcular v

Corda em tensão $\rightarrow$ descrita pela tensão T (suposta constante)
densidade linear μ





t fixo

Eq Newton para o pedacinho de corda

X : não tem movimento

$$y : \quad dm \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = T_y(x+dx) - T_y(x)$$

Mas : $(\bullet)$ $dm = \mu\, dx$ $\qquad$ $(\bullet)$ $\sin\theta \approx tg\,\theta \approx \dfrac{\partial A}{\partial x}$

$(\bullet)$ $T_y = T\sin\theta$

$$\Longrightarrow \quad \mu\, dx \,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = T\frac{\partial A}{\partial x}(x+dx) - T\frac{\partial A}{\partial x}(x)$$

$$= T\left\{ \cancel{\frac{\partial A}{\partial x}(x)} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}dx - \cancel{\frac{\partial A}{\partial x}(x)} \right\}$$

$$= T\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}$$

ONDA TRANSVERSA

A = deslocamento vertical

$\frac{T}{\mu} = v^2$ = velocidade onda

---

2. ONDAS SONORAS EM 1 DIMENSÃO

(•) ondas mecânicas (= se propagam apenas na presença de um meio)

(•) ondas longitudinai associadas a variações de pressão
(pequenas comparadas ao equilíbrio)

Vamos supor que o meio tenha

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \text{pressão de equilíbrio} \\ \rho_0 &= \text{densidade de equilíbrio} \end{aligned}\right\} \text{ na ausência da onda}$$

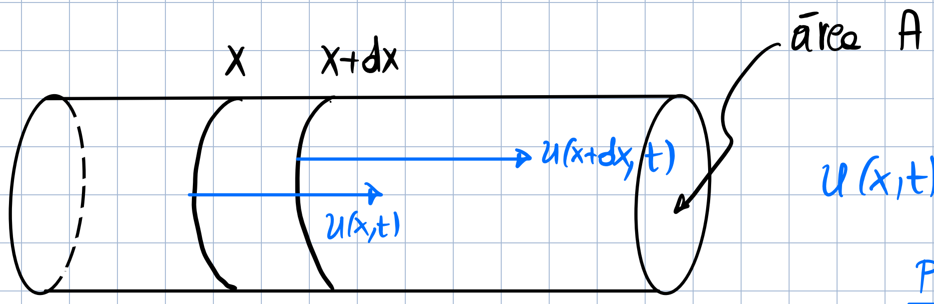
Na presença da onda $\rightarrow$

$$p(x,t) = p_0 + \hat{p}(x,t)$$

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \hat{\rho}(x,t)$$

Com $\quad |\hat{p}| \ll p_0 , \quad |\hat{\rho}| \ll \rho_0$

Vamos considerar um cilindro



$u(x,t)$ = deslocamento do fluido

PEQUENO

Volume antes do deslocamento : $V_0 = A\left[(x+dx)-x\right] = A\,dx$

Após o deslocamento :

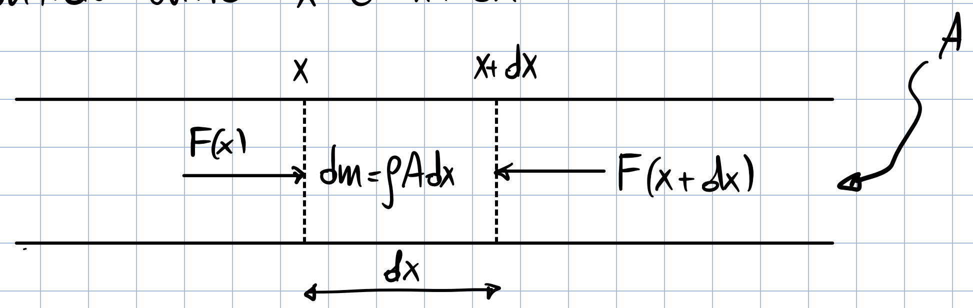
$$
\begin{aligned}
V_0 + dV &= A\Big\{\big(x+dx+u(x+dx,t)\big) - \big(x+u(x,t)\big)\Big\} \\
&= A\Big\{dx + u(\cancel{x},t) + \frac{\partial u}{\partial x}dx - \cancel{u(x,t)}\Big\} \\
&= A\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \\
&= V_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{V_0} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Em termos da densidade : $\rho_0 = \dfrac{M}{V_0} \Rightarrow \rho_0 + \hat{\rho} = \dfrac{M}{V_0+dV}$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 + \hat{\rho} = \frac{\rho_0}{1+\frac{dV}{V_0}} \approx \rho_0\left(1-\frac{dV}{V_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} = -\frac{dV}{V_0} = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Vamos agora calcular a eq. de movimento da porção de meio contido entre x e $x+dx$:



$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x) - F(x+dx) = A\left[p(x) - p(x+dx)\right]$$

$$= A\left[\cancel{p(x)} - \cancel{p(x)} - \frac{\partial p}{\partial x} dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A dx \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Temos portanto
$$\begin{cases} \delta\rho = -\rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

O último ingrediente que falta é uma eq. de estado

$$p = p(\rho)$$

$$\Rightarrow \quad p_0 + \hat{p} = p(\rho_0 + \hat{\rho}) = p(\rho_0) + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \hat{\rho}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{p} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \hat{\rho} \quad \text{ou} \quad p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho$$

Logo $$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = -\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x}$$

$$= -\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \left(-\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \text{com} \quad v_s^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0$$

Podemos também escrever

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} = -v_s^2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x} = -v_s^2 \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v_s^2 \rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\right)$$

$$= v_s^2 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2}$$

$\rightarrow$ a pressão satisfaz a mesma eq. de onda (com a mesma velocidade)

Usando $\hat{p} = v_s^2 \hat{\rho}$, podemos mostrar imediatamente que

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial t^2} = v_s^2 \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2}$$

2.1. ONDAS SONORAS EM ÁGUA E SÓLIDOS

(1) def: MÓDULO DE ELASTICIDADE VOLUMÉTRICO B

$$B \equiv -\frac{\hat{p}}{\delta V / V}$$

Como $\frac{\delta V}{V} = -\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} \Rightarrow B = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}\rho_0 = v_s^2 \rho_0$

$$\Rightarrow \boxed{v_s^2 = \frac{B}{\rho_0}}$$

(2) Alguns exemplos:

(a) Água: $\left.\begin{array}{l} B \simeq 2.2 \times 10^9 \ \frac{N}{m^2} \\ \rho_0 \simeq 10^3 \ \frac{kg}{m^3} \end{array}\right\} \Rightarrow v_s \approx 1483 \ \frac{m}{s}$

(b) Rocha: $\left.\begin{array}{l} B \simeq 9.4 \times 10^{10} \ \frac{N}{m^2} \\ \rho_0 \simeq 2600 \ \frac{kg}{m^3} \end{array}\right\} \Rightarrow v_s \simeq 6000 \ \frac{m}{s}$

(c) Aterro: $\left.\begin{array}{l} B \simeq 1.5 \times 10^7 \ \frac{N}{m^2} \\ \rho_0 \simeq 1500 \ \frac{kg}{m^3} \end{array}\right\} \Rightarrow v_s \simeq 100 \ \frac{m}{s}$

2.2. ONDAS SONORAS NA ATMOSFERA

Do módulo de termodinâmica $\rightarrow$ $pV = nRT$ $\qquad n = n^o \text{ moles} = \frac{M}{M_{mol}}$

massa gas

massa molar

Eq. de estado $p(\rho)$: $p = \frac{n}{V} RT = \frac{M}{V} \frac{RT}{M_{mol}}$

$$= \rho \frac{RT}{M_{mol}}$$

Em 1816, Laplace compreendeu que as compressões/expansões sonoras são tão rápidas que não há tempo hábil para ter troca de calor (= processo adiabático)

$$\Rightarrow \quad p = b\rho^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1 \quad , \quad \gamma = \begin{cases} 1.67 & \text{gas monoatômico} \\ 1.4 & \text{gas diatômico (AR)} \end{cases}$$

Logo $\quad v_s^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0 = \gamma b \rho^{\gamma-1} = \gamma \left.\frac{b\rho^{\gamma}}{\rho}\right|_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$

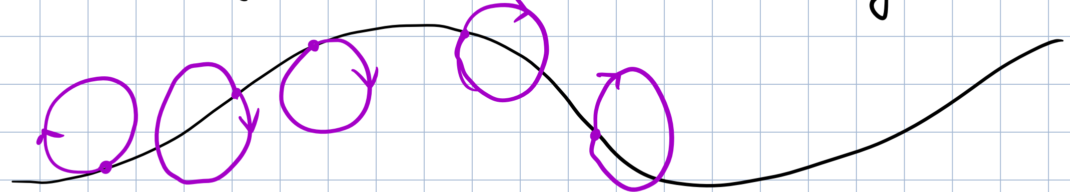
Exemplo : $\quad T = 35°$ $\quad \left.\begin{array}{l} \rho_0 \simeq 1.15 \ \frac{kg}{m^3} \\ p_0 \simeq 101709 \ Pa \end{array}\right\} \Rightarrow v_s \simeq 351.88 \ \frac{m}{s}$

$T = 0°$ $\quad \left.\begin{array}{l} \rho_0 \simeq 1.2922 \ \frac{kg}{m^3} \\ p_0 \simeq 101308 \ Pa \end{array}\right\} \Rightarrow v_s \simeq 331.3 \ \frac{m}{s}$

---

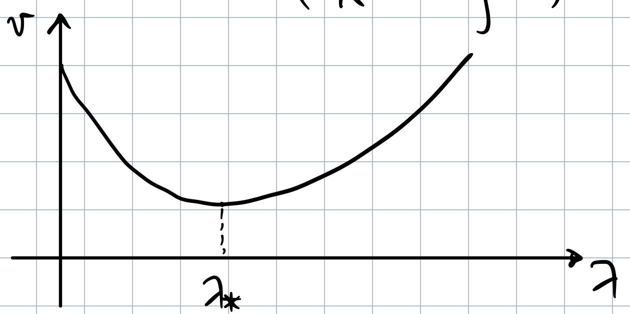
3. ONDAS NA SUPERFÍCIE DA ÁGUA

Apesar de ser um dos exemplos mais comuns de ondas, a matemática envolvida é complicada (→ curso de mecânica de fluidos) porque o movimento é circular (= combinação de movimento longitudinal e transverso)



Aqui reportamos apenas a fórmula para a velocidade:

$$v^2 = \left(\frac{g}{k} + \frac{kT}{\rho} \right) \operatorname{tgh}(hk)$$



T = tensão superficial

h = altura

ρ = densidade

k = número de onda

Para $h \gg \frac{1}{k} \sim \lambda$ (água muito profunda) $\rightarrow \operatorname{tgh}(kh) \simeq 1$

O mínimo da velocidade corresponde a k_* tal que

$$\frac{g}{k_*} = \frac{k_* T}{\rho} \Rightarrow k_* = \sqrt{\frac{\rho g}{T}}$$

e podemos rescreever

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 + \frac{k^2 T}{g\rho}\right) = \frac{g}{k}\left(1 + \frac{k^2}{k_*^2}\right)$$

Temos 2 casos: (a) $k \gg k_*$ $(\lambda \ll \lambda_*)$

$$\Rightarrow v^2 \approx \frac{g}{k}\frac{k^2}{k_*^2} = \frac{gk}{k_*^2} = \frac{T}{\rho}k$$

(b) $k \ll k_*$ $(\lambda \gg \lambda_*)$

$$\Rightarrow v^2 \approx \frac{g}{k}$$

Importante: neste caso v depende de $k(\lambda)$!

$\Rightarrow$ a onda tende a se deformar na propagação $\Rightarrow$ <u>meio dispersivo</u>

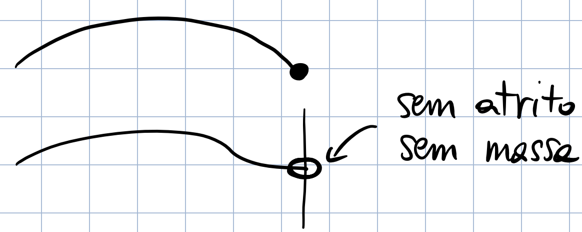
CONDIÇÕES DE CONTORNO

Tendo estudado alguns exemplos de ondas, vamos agora focar nas condições de contorno.

Exemplo → <u>CORDA VIBRANTE</u>

2 tipos de condições de contorno:

$\begin{cases} \text{DIRICHLET} & \text{corda fixa} \\ \text{NEUMANN} & \text{corda livre} \end{cases}$



Vamos ver alguns exemplos:

(1) Corda fixa nas duas extremidades (Dirichlet-Dirichlet)

$$f_k(x,t) = a_k \cos(kx)\cos(\omega_k t) + b_k \cos(kx)\sin(\omega_k t)$$
$$+ c_k \sin(kx)\cos(\omega_k t) + d_k \sin(kx)\sin(\omega_k t)$$

$\boxed{x=0} \rightarrow f(0,t) = 0 = a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)$

$\Rightarrow$ devendo valer $\forall t$, precisamos de $a_k = 0 = b_k$

$\boxed{x=L} \rightarrow f(L,t) = 0 = \sin(kL)\left[c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t)\right]$

$\Rightarrow$ devendo valer $\forall t$ (e não podendo escolher $c_k = 0 = d_k$, porque não existiria onda com tal escolha)

somos forçados a considerar

$$kL = \pi n \qquad n = \text{inteiro}$$

Conclusão : para corda fixa nas duas extremidades

$$f_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\underbrace{\left[c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t)\right]}$$

podemos reescrever como

$A\cos(\omega_n t + \phi)$ [mostre!]

com $\omega_n = v\, k_n = \frac{\pi n}{L} v \longrightarrow$ frequências dos MODOS NORMAIS

Obs importante : a onda obtida não é da forma $f(x \pm vt)$,

mas $f(x)\, g(t)$

$\Rightarrow$ ONDA ESTACIONÁRIA

Podemos sempre imaginar a onda estacionária como

$$f_n = A \sin\left(\overbrace{\frac{\pi n}{L}}^{k_n} x\right) \cos(\omega_n t + \phi)$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha = \omega_n t + \phi \,,\quad \beta = k_n x$

$$= \frac{A}{2}\left[\sin(\omega_n t + k_n x + \phi) - \sin(\omega_n t - k_n x + \phi)\right]$$

$$= \frac{A}{2}\left[\underbrace{\sin[k_n(x+vt)+\phi]}_{\longleftarrow} + \underbrace{\sin[k_n(x-vt)-\phi]}_{\longrightarrow}\right]$$

(2) Corda fixa em uma estremidade e livre na outra (Dirichlet - Neumann)

Livre quer dizer que $\frac{\partial A}{\partial x}(L,t) = 0$ (a extremidade fica horizontal)

Como no exemplo antecedente

$\boxed{x=0} \longrightarrow f_k(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_k = \sin(kx)\left[c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t)\right]$

mas agora

$\boxed{x=L} \longrightarrow \left.\frac{\partial f_k}{\partial x}\right|_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f_k}{\partial x}\right|_L = k\cos(kL)\left[\qquad\qquad\right] = 0$

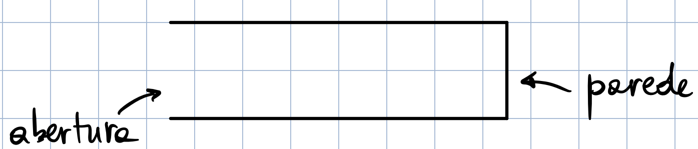
$$\Rightarrow \quad kL = \frac{2n+1}{L}\frac{\pi}{2}$$

e $\omega_n = v k_n = \frac{(2n+1)\pi v}{2L} \longrightarrow$ frequências dos MODOS NORMAIS

(3) Corda livre nas duas extremidades (Neumann- Neumann)

$\rightarrow$ exercício

As mesmas condições de contorno podem ser aplicadas para o som :



(a) parede $\longleftrightarrow$ deslocamento $u(x_{parede}, t) = 0$

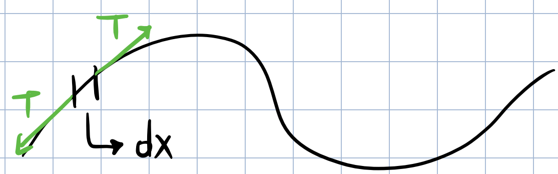
(b) abertura $\longleftrightarrow$ $u \neq 0$ mas $\hat{p} = 0$ (porque deve ser igual à pressão externa)

$$\Rightarrow \text{Como } \hat{p} \propto \hat{\rho} \propto \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\text{abertura}} = 0$$

ENERGIA TRANSPORTADA NA PROPAGAÇÃO

(a) Corda vibrante



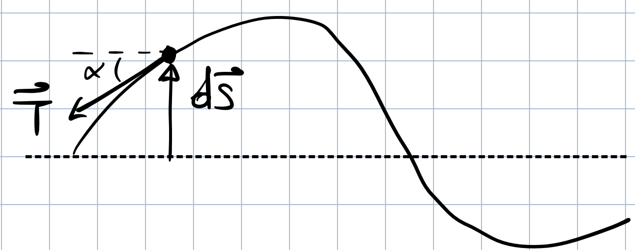
Energia carregada por um trecho de comprimento dx :

1. cinética : $dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} \mu \, dx \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$

$$\Rightarrow \text{energia}/\text{comprimento} = \frac{dK}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$$

2. potencial (o que coloca a corda em movimento faz trabalho)

$\Downarrow$



Vamos considerar a tensão à esquerda

Quanto a corda é esticada em x ?

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta A^2} - \Delta x = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2} - \Delta x$$

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} dx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \dots\right) - dx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dx} \approx \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

Logo, a densidade de energia total é

$$\frac{dE_T}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

quadrática na amplitude!

Podemos também definir a <u>POTÊNCIA</u>

$$P = \underbrace{\left(T\,\frac{\partial A}{\partial x}\right)}_{\text{força que tira a corda do equilíbrio}}\frac{\partial A}{\partial t}$$

Usando

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}A(x \pm vt) = A' \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}A(x \pm vt) = \pm vA'\end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \pm\frac{1}{v}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$P = \pm\underbrace{\frac{T}{v}}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 = \pm\underbrace{\mu v}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$$

o coeficiente de $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$ na potência é chamado de <u>IMPEDÂNCIA</u> Z

Veremos que Z jogará um papel essencial na propagação entre meios diferentes

Podemos chegar ao mesmo resultado usando $\frac{dE}{dx}$:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dA}\frac{dA}{dt} = \frac{dE}{dx}\underbrace{\frac{1}{\frac{\partial A}{\partial x}}}_{\pm \frac{v}{\partial A/\partial t}}\frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \pm v \left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2\right] = \pm \mu v \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 \quad \checkmark$$

$$T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \to v^2 \mu \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$$

(b) Som em uma dimensão

Agora temos, em um volume V_0 de interesse,

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\rho_0 V_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

Por outro lado, a perturbação na pressão $\hat{p}$ faz trabalho para expandir o volume de V_0 à $V = V_0 + \delta V$:

$$W = \int_{V_0}^{V} \hat{p}\, dV = -\frac{V_0}{V_s^2 \rho_0}\int_0^{\hat{p}} \hat{p}'\, d\hat{p}' = -\frac{1}{2}\frac{V_0}{V_s^2\rho_0}\hat{p}^2$$

$$\frac{dV}{V_0} = -\frac{d\hat{\rho}}{\rho_0} = -\frac{d\hat{p}}{V_s^2\rho_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{U}(\hat{p}) = \frac{1}{2}\frac{V_0}{V_s^2\rho_0}\hat{p}^2$$

A energia total carregada por uma onda sonora é portanto

$$E = \frac{1}{2}\rho_0 V_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{V_0}{V_s^2 \rho_0}\hat{p}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{V_s^2\rho_0}\right) V_0$$

$$= \quad \text{usando } \hat{p} = V_s^2 \hat{\rho} = -V_s^2 \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} V_s^2 \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] V_0$$

Para ondas progressivas, $u = u(x \pm V_s t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{1}{V_s}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{E}{V_0} = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

Usando esse resultado, podemos calcular a potência:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt} = \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 A \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial u}{\partial t}}_{\pm V_s}$$

$$= \pm V_s \rho_0 A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

Como a frente de onda no som é a superfície A, para obter um resultado independente de A definimos a

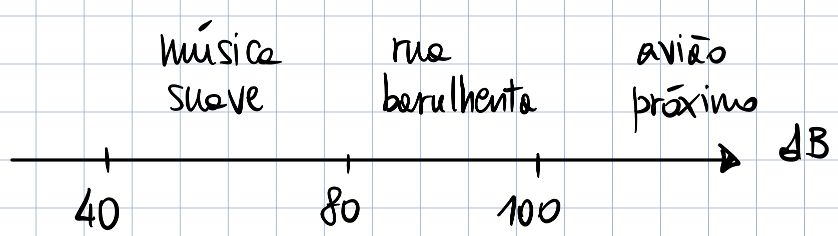
INTENSIDADE

$$I = \frac{P}{A} = \pm \underbrace{v_s \rho_0}_{\text{IMPEDÂNCIA ESPECÍFICA DO MEIO}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

Parêntese: OUVIDO HUMANO

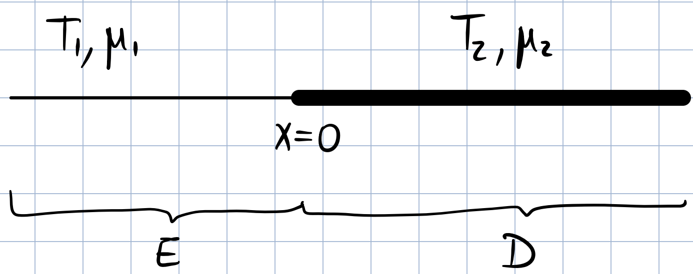
Ouvido humano funciona em escala logarítmica na intensidade:

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \qquad \underbrace{I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2} \rightarrow 0 \text{ dB (decibel)}}_{\text{limiar do ouvido humano}}$$



JUNÇÃO ENTRE DOIS MEIOS

Vamos agora ver o que acontece na junção entre dois meios usando o exemplo da corda:



Sabemos da experiência que, soltando uma onda progressiva em $x \ll 0$, ao chegar na junção teremos uma parte <u>refletida</u> (em E) e uma parte <u>transmitida</u> (em D)

E : $\dfrac{\partial^2 A_E}{\partial t^2} = v_1^2 \dfrac{\partial^2 A_E}{\partial x^2}$, $v_1^2 = \dfrac{T_1}{\mu_1}$ $\qquad x<0$

D : $\dfrac{\partial^2 A_D}{\partial t^2} = v_2^2 \dfrac{\partial^2 A_D}{\partial x^2}$, $v_2^2 = \dfrac{T_2}{\mu_2}$ $\qquad x>0$

Na junção : (1) $A_E(0,t) = A_D(0,t) \quad \forall t$

(2) a eq. de Newton é

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(0,t) = T_1 \frac{\partial A_E}{\partial x}(0,t) - T_2 \frac{\partial A_D}{\partial x}(0,t)$$

$$\Big\downarrow \; \Delta x \to 0$$

$$T_1 \frac{\partial A_E}{\partial x}(0,t) = T_2 \frac{\partial A_D}{\partial x}(0,t)$$

Vamos agora escrever

$$A_E(x,t) = \overset{\text{incidente}}{f_i\left(t - \frac{x}{v_1}\right)} + \overset{\text{refletida}}{f_r\left(t + \frac{x}{v_1}\right)}$$

$$A_D(x,t) = \overset{\text{transmitida}}{f_t\left(t - \frac{x}{v_2}\right)}$$

forma conveniente do argumento que deixa os cálculos mais simples

e impor as condições na junção:

$$A_E(0,t) = A_D(0,t) \Longrightarrow f_i(t) + f_r(t) = f_t(t)$$

$$T_1 \frac{\partial A_E}{\partial x}(0,t) = T_2 \frac{\partial A_D}{\partial x}(0,t) \Rightarrow T_1\left[-\frac{1}{v_1} f_i'(t) + \frac{1}{v_1} f_r'(t)\right] = T_2\left[-\frac{1}{v_2} f_t'(t)\right]$$

integrando

$$\frac{T_1}{v_1}\left[f_r(t) - f_i(t)\right] = -\frac{T_2}{v_2} f_t(t) + c$$

se não fosse nulo, o lado direito teria um deslocamento constante $\Rightarrow c = 0$

Resolvendo o sistema:

$$f_r(t) = \frac{\frac{T_1}{v_1} - \frac{T_2}{v_2}}{\frac{T_1}{v_1} + \frac{T_2}{v_2}} f_i \quad , \quad f_t(t) = \frac{2\frac{T_1}{v_1}}{\frac{T_1}{v_1} + \frac{T_2}{v_2}} f_i$$

Mas $\frac{T_1}{v_1} \equiv Z_1$ (impedância!), $\frac{T_2}{v_2} \equiv Z_2$

$$\Rightarrow \boxed{f_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} f_i \quad , \quad f_t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} f_i}$$

Definimos $R \equiv \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ = coeficiente de reflexão

$T \equiv \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ = coeficiente de transmissão

Já vimos que a impedância Z aparece na expressão da potência $P = Z\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$

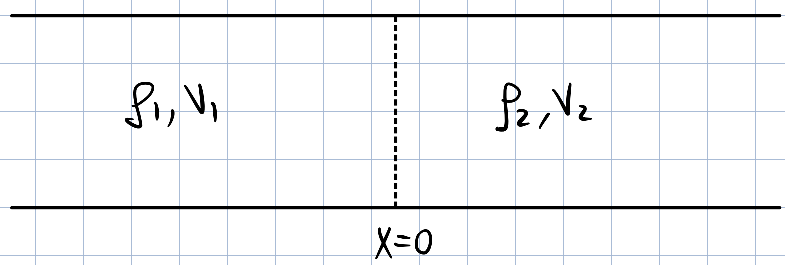
Por que está aparecendo aqui também? Porque está dizendo que a potência é conservada na passagem da onda para o segundo meio:

$$\left.\begin{aligned} P_i &= Z_1\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)^2 \\ P_r &= Z_1\left(\frac{\partial f_r}{\partial t}\right)^2 = Z_1 R^2\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)^2 \\ P_t &= Z_2\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)^2 = Z_2 T^2\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} P_r + P_t &= \left(R^2 + \frac{Z_2}{Z_1} T^2\right) P_i \\ &= \left[\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2} + \frac{Z_2}{Z_1}\frac{4 Z_1^2}{(Z_1+Z_2)^2}\right] P_i \\ &= \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - 2 Z_1 Z_2 + 4 Z_1 Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} P_i \\ &= \frac{(Z_1+Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2} P_i = P_i \quad ! \end{aligned}$$

As expressões $\begin{cases} f_r = R\, f_i \\ f_t = T\, f_i \end{cases}$

são completamente gerais. Para nós convencermos, vamos considerar o caso do som:



Em $x=0$: (1) $u_e(t) = u_d(t) \qquad \forall t$

(2) $$\delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_d - F_e \xrightarrow{\delta m \to 0} F_d = F_e$$

$$p_0 + \hat{p}_d = p_0 + v_2^2 \hat{\rho}_d = p_0 - v_2^2 \rho_2 \frac{\partial u_d}{\partial x}$$

$$p_0 + \hat{p}_1 = p_0 + v_1^2 \hat{\rho}_1 = p_0 - v_1^2 \rho_1 \frac{\partial u_e}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ são exatamente as mesmas equações da corda, com a substituição

$$T_i \to \rho_i v_i^2$$

$\Rightarrow$ isso nos leva a considerar $Z_i = \dfrac{T_i}{v_i} \to \dfrac{\rho_i v_i^2}{v_i} = \underbrace{\rho_i v_i}_{\text{impedância do som que já encontramos!}}$

<u>Importante</u>: o que acontece quando o segundo meio é uma parede?

Corda

$\downarrow$

$$Z_{parede} = \mu v \overset{!}{=} \sqrt{\mu T} \xrightarrow{\mu \to \infty} \infty$$

Som

$\downarrow$

$$Z_{parede} = \rho v \xrightarrow{\rho \to \infty} \infty$$

$$\Rightarrow \quad f_r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} f_i = -f_i$$

onda refletida inverte a amplitude

$$f_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} f_i = 0$$

não há onda transmitida

EQ. DE ONDA EM MAIS DIMENSÕES

Vimos que, quando a onda se propaga em 1 dim., ela obedece

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Como generalizamos à mais dimensões?

Vamos ver um exemplo concreto: <u>propagação do som em 2 dim.</u>

Vamos seguir o mesmo roteiro que foi seguido em 1 dim:

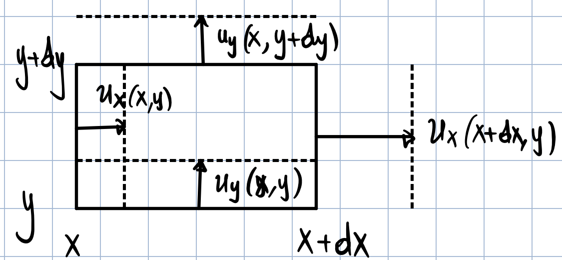
(a) variação volume

(b) variação densidade

(c) eq. movimento

(d) eq. de estado

Volume (visto de acima)



altura

$$V_0 = h\,[(x+dx)-x]\,[(y+dy)-y] = h\,dx\,dy$$

$$V = h\left[(x+dx+u_x(x+dx,y)) - (x+u_x(x,y))\right]\left[(y+dy+u_y(x,y+dy)) - (y+u_y(x,y))\right]$$

$$\simeq h\left[dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx\right]\left[dy + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy\right]$$

$$\simeq V_0\left[1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]\left[1+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]$$

$$\simeq V_0\left[1+\underbrace{\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\text{divergente } \vec{\nabla}\cdot\vec{u}}\right] = V_0\left[1+\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dV}{V_0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}}$$

Densidade : da conservação da massa, $\rho_0 V_0 = \rho V$

$$= (\rho_0 + d\rho)(V_0 + dV)$$

$$= \rho_0 V_0 + d\rho\, V_0 + \rho_0\, dV$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{V_0} = -\frac{d\rho}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho_0} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$

Eq. movimento : agora temos 2 componentes

$$\begin{cases} dm \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -V_0 \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ dm \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = -V_0 \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} p}$$

Eq. de estado : funciona como no caso 1 dimensional

$$dp = v_s^2\, d\rho \quad , \quad v_s^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_0$$

As equações que foram obtidas são

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \quad , \quad \rho_0 \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}p \quad , \quad dp = V_s^2 d\rho$$

(1) (2) (3)

Tomamos $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(1) \Longrightarrow \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = -\rho_0\, \vec{\nabla}\cdot \underset{\uparrow\,(2)}{\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}} = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}p}_{} = \vec{\nabla}^2 p$

$$\left(\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{e}_y\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \equiv \vec{\nabla}^2 p$$

Logo, $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \underset{\uparrow\,(3)}{\vec{\nabla}^2 p} = V_s^2\,\vec{\nabla}^2\rho$

ou $\underset{\uparrow\,(3)}{\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}} = \vec{\nabla}^2 p \Longrightarrow \frac{1}{V_s^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 p$

Descobrimos que a eq. de onda em mais dimensões é

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2\,\vec{\nabla}^2 A \qquad \text{com} \quad \vec{\nabla}^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}}$$

ONDAS PLANAS, ESFÉRICAS E CILÍNDRICAS

Vamos considerar uma onda progressiva em mais dimensões

$d=1$: $f(x - vt)$ $\longrightarrow$ para deixar o argumento adimensional, multiplico por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\downarrow$$

$$f(kx - kvt) = f(kx - \omega t)$$

$$\downarrow$$

em $d>1$, $x \to \vec{x}$

$k \to \vec{k}$

$$\downarrow$$

$$f(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

Para ondas harmonicas, temos

$$\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \quad \text{ou} \quad \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

ou, mais em geral, podemos escrever

$$e^{\underbrace{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}}$$

$$\downarrow$$

"fase" da onda

Frente de onda = superfície na qual a fase é constante

(para t fixo)

$\Rightarrow$ superfície $\vec{k}\cdot\vec{x} = \text{const}$

$$\text{Frente} = \begin{cases} \text{plano} & \longrightarrow & \text{onda plana} \\ \text{esfera} & \longrightarrow & \text{onda esférica} \\ \text{cilindro} & \longrightarrow & \text{onda cilíndrica} \end{cases}$$

O que determina o tipo de onda é a fonte.

No caso de ondas esféricas e cilíndricas, é melhor usar coordenadas esféricas e cilíndricas:

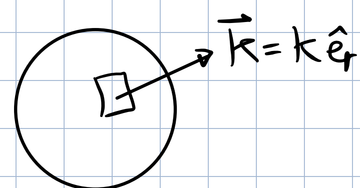
coord. esféricas (r, θ, φ)

$$\vec{\nabla}^2 A = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}$$

coord. cilíndricas (ρ, θ, z)

$$\vec{\nabla}^2 A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

ONDAS ESFÉRICAS



No caso de ondas esféricas, $\vec{k} = k\hat{e}_r$

$\Rightarrow$ a fase é constante quando $r = \text{const}$ e não há dependência de θ ou φ

$\Rightarrow$ apenas a parte radial do Laplaciano importa

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A(r,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r A(r,t)\right)$$

$\downarrow$

vamos definir $\hat{f}(r,t) = r\,A(r,t)$

$\downarrow$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial r^2}$$

$\Rightarrow$ eq. de onda em 1 dimensão!

$\Downarrow$

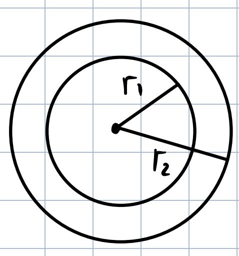
$$\hat{f}(r,t) = f(r-vt) + g(r+vt)$$

$\Longrightarrow$ a função $A(r,t)$ é da forma

$$A(r,t) = \underbrace{\frac{1}{r}}\left(f(r-vt) + g(r+vt)\right)$$

$\hookrightarrow$ a amplitude deve cair como $\frac{1}{r}$

Poderíamos ter chegado na mesma conclusão impondo conservação da energia e lembrando que a intensidade depende do quadrado da amplitude:

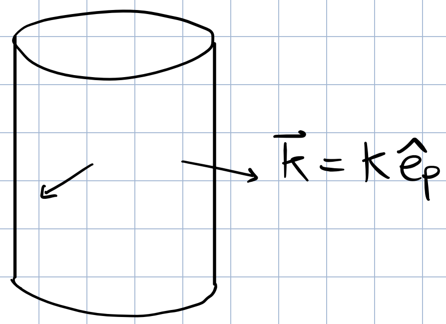


$$P = I\,\text{Área}$$
$$\overset{!}{=} I\,4\pi r^2$$

$\Rightarrow$ para ter uma constante, $I \propto \frac{1}{r^2}$ $\Rightarrow$ amplitude $\propto \frac{1}{r}$

ONDAS CILÍNDRICAS

Agora temos

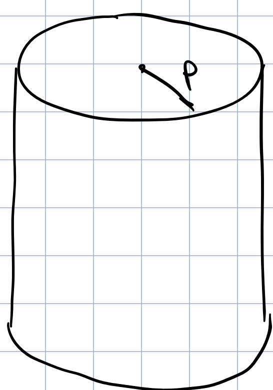


$\Rightarrow$ a fase não depende de (θ, z)

$\Rightarrow$ eq. de onda vira

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho}\right)$$

Para entender a dependência da amplitude na distância ρ, vamos usar a conservação da energia:



$$P = I \text{ Área} = I\, 2\pi\rho h$$

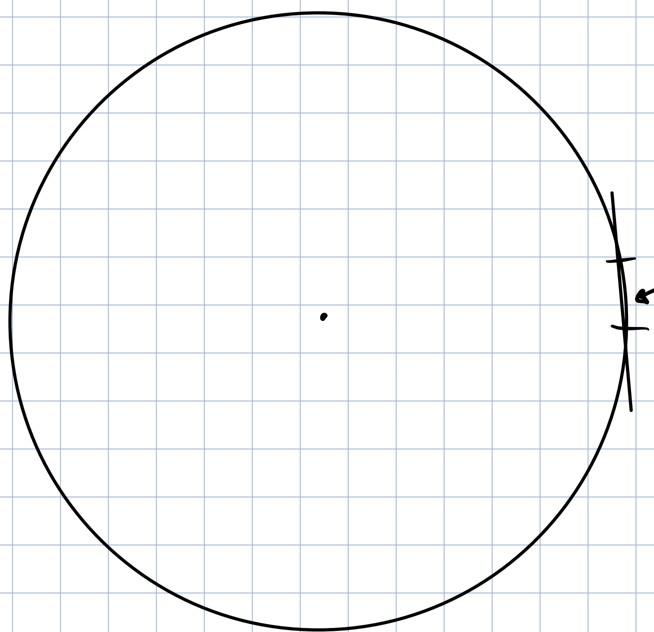
$\Rightarrow$ amplitude $\propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$

$\Rightarrow$ substituindo $A = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(f(k\rho - \omega t) + g(k\rho + \omega t)\right)$

na eq. de onda, descobrimos que é solução apenas para $k\rho \gg 1$ (indicação que a eq. é mais complicada)

ONDAS PLANAS

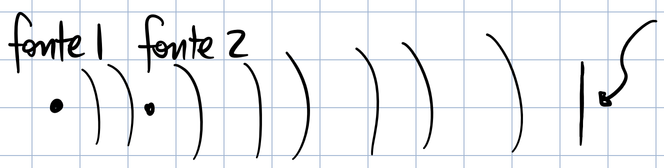
Importante: longe da fonte e localmente, qualquer frente de onda aparece plana



bem aproximada por um plano (curvatura local é pequena)

INTERFERÊNCIA

O que acontece somando 2 ondas? Superposição (= interferência)



muito longe

$\downarrow$

ondas planas $\begin{cases} A_1 = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \\ A_2 = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ onda total : $A = A_1 + A_2$

$$\begin{aligned}
&= A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) + A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2) \\
&= A_0 \, \mathrm{Re}\left[e^{i(kx - \omega t + \varphi_1)} + e^{i(kx - \omega t + \varphi_2)} \right] \\
&= A_0 \, \mathrm{Re}\left[e^{i(kx - \omega t)} \left(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} \right) \right] \\
&= A_0 \, \mathrm{Re}\left[e^{i(kx - \omega t)} \, e^{i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \underbrace{\left(e^{i\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} + e^{-i\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} \right)}_{2\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} \right] \\
&= 2A_0 \cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{diferença de fase}}
\end{aligned}$$

Vamos olhar às potências médias :

$$\overline{P_1} = Z \overline{\left(\frac{\partial A_1}{\partial t}\right)^2} = Z \overline{\left(-A_0 \omega \sin(kx - \omega t + \varphi_1)\right)^2} = Z \frac{A_0^2 \omega^2}{2} = \overline{P_2}$$

Para a onda total

$$\overline{P} = Z\overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2} = 4ZA_0^2\omega^2\ \overline{\sin^2\left(kx-\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}\ \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$= 4\,\overline{P_1}\,\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Temos 3 casos: (1) $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \overline{P} = 4\overline{P_1}$ int. construtiva

(2) $\Delta\varphi = \pi \Rightarrow \overline{P} = 0$ int. destrutiva

(3) $\Delta\varphi$ varia no tempo $\Rightarrow \overline{\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\overline{P} = 2\overline{P_1}$$

(fontes não correlacionadas)

Vamos agora complicar um pouco:

interferência entre $\begin{cases} A_1 = A_0\cos(k_1x-\omega_1t) \\ A_2 = A_0\cos(k_2x-\omega_2t) \end{cases}$

Escrevendo $\omega_1 = \overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$ $\quad k_1 = \overline{k} + \frac{\Delta k}{2}$

$\omega_2 = \overline{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}$ $\quad k_2 = \overline{k} - \frac{\Delta k}{2}$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = A_0\cos\Big(\underbrace{\overline{k}x-\overline{\omega}t}_{a} + \underbrace{\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t}_{b}\Big) + A_0\cos\left(\overline{k}x-\overline{\omega}t - \frac{\Delta k}{2}x + \frac{\Delta\omega t}{2}\right)$$

$$= A_0 \left[\cos(a+b) + \cos(a-b) \right]$$

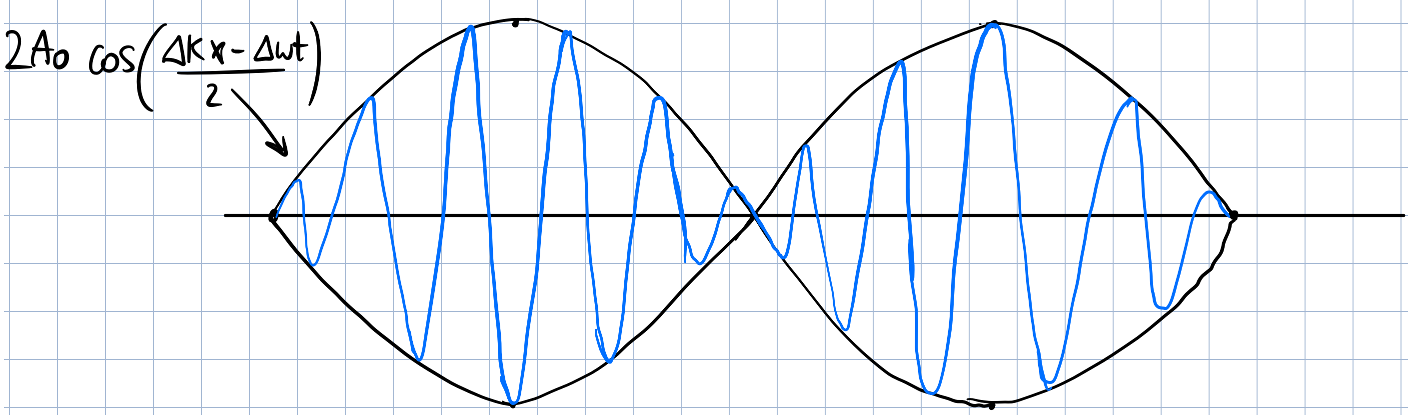
$$= 2A_0 \cos a \cos b$$

$$= 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k x - \Delta \omega t}{2}\right) \cos\left(\bar{k} x - \bar{\omega} t\right)$$

Quando $\Delta k \ll \bar{k}$ & $\Delta \omega \ll \bar{\omega}$

temos uma onda $\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$ com amplitude modulada por $\cos\left(\frac{\Delta k x - \Delta \omega t}{2}\right)$ (que varia devagar)

$\longrightarrow$ BATIMENTOS



Esse é o exemplo mais simples de grupo de ondas

$\parallel$

pacote de ondas

VELOCIDADE DE FASE E DE GRUPO

Velocidade com que se desloca um ponto de fase constante

→ <u>velocidade de fase</u>

$$\varphi = \bar{k}x - \bar{\omega}t \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 = \bar{k}v_f - \bar{\omega} \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

Velocidade com que se desloca o grupo de ondas como um todo é a velocidade associada a um ponto da envoltoria

→ <u>velocidade de grupo</u>

$$A(x,t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta k\, x - \Delta\omega\, t}{2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\Delta k}{2} v_g - \frac{\Delta\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Exemplo : (1) CORDA VIBRANTE

$$v = \frac{\omega}{k} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad v_f = v_g = v$$

meio não dispersivo

(2) ONDAS EM ÁGUAS PROFUNDAS

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_f = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{g}{k}} \\ v_g = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{1}{2} v_f \end{cases}$$

meio dispersivo

EFEITO DOPPLER

Até agora → fonte e receptor parados

O que acontece quando um dos dois, ou ambos, estão em movimento? Vamos tomar $v_{F,R} < v_s$

↳ velocidade fonte/receptor

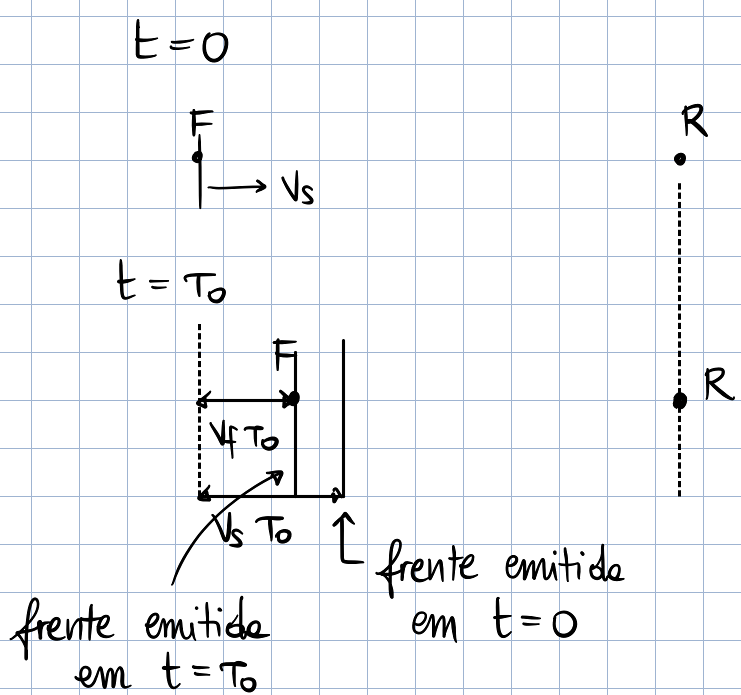
(a) Receptor parado, fonte se aproximando com velocidade v_f

em repouso, F emite ondas de comprimento λ_0

$\lambda_0 = v_s T_0$

↳ período

Velocidade (no ref. de repouso do meio)



Receptor mede 2 frentes separadas por

$$\lambda = (v_s - v_f) T_0 = (v_s - v_f)\frac{\lambda_0}{v_s} = \left(1 - \frac{v_f}{v_s}\right)\lambda_0$$

Para $v_f < v_s \Rightarrow \lambda < \lambda_0$

Em termos de frequência: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{v_s}{\lambda} = \dfrac{v_s}{1 - \frac{v_f}{v_s}} \dfrac{1}{\lambda_0}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{v_f}{v_s}} \nu_0$$

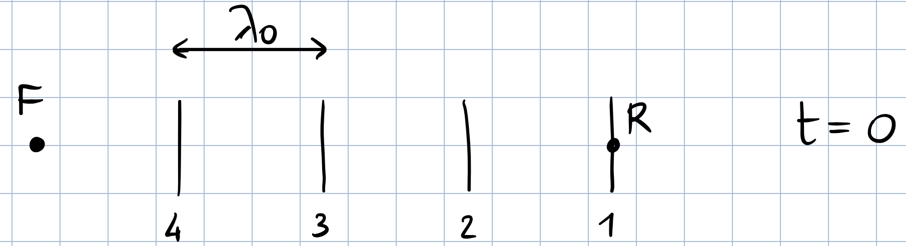
$\Rightarrow \quad \nu > \nu_0$ frequência medida é maior

Quando a <u>fonte se afasta</u> $\quad v_f \to -v_f$

$$\lambda = \left(1 + \frac{v_f}{v_s}\right)\lambda_0 > \lambda_0, \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{v_f}{v_s}} \nu_0 < \nu_0$$

$\Rightarrow$ frequência medida é menor

(b) <u>Fonte parada, receptor em movimento com v_R</u>



Em $t = 0$, R recebe a frente de onda 1.
Depois de quanto tempo recebe a frente de onda 2?

R: $\quad x_R = v_R\, t$

Frente$_2$: $\quad x_{F_2} = -\lambda_0 + v_s\, t$

Impondo $x_R = x_{F_2} \Rightarrow v_R t = -\lambda_0 + v_S t$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_0 = (v_S - v_R)t$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{\lambda_0}{v_S - v_R} = T = \text{periódo medido}$$

Em termos de $T_0 = \dfrac{\lambda_0}{v_S}$

$$\Rightarrow T = \frac{v_S}{v_S - v_R} T_0 \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{v_S - v_R}{v_S} \nu_0 < \nu_0$$

Quando o receptor se aproxima : $v_R \to -v_R$

$$\nu = \frac{v_S + v_R}{v_S} \nu_0 > \nu_0$$

(c) Quando os dois efeitos são combinados

$$\nu = \frac{v_S \mp v_R}{v_S \pm v_f} \nu_0$$

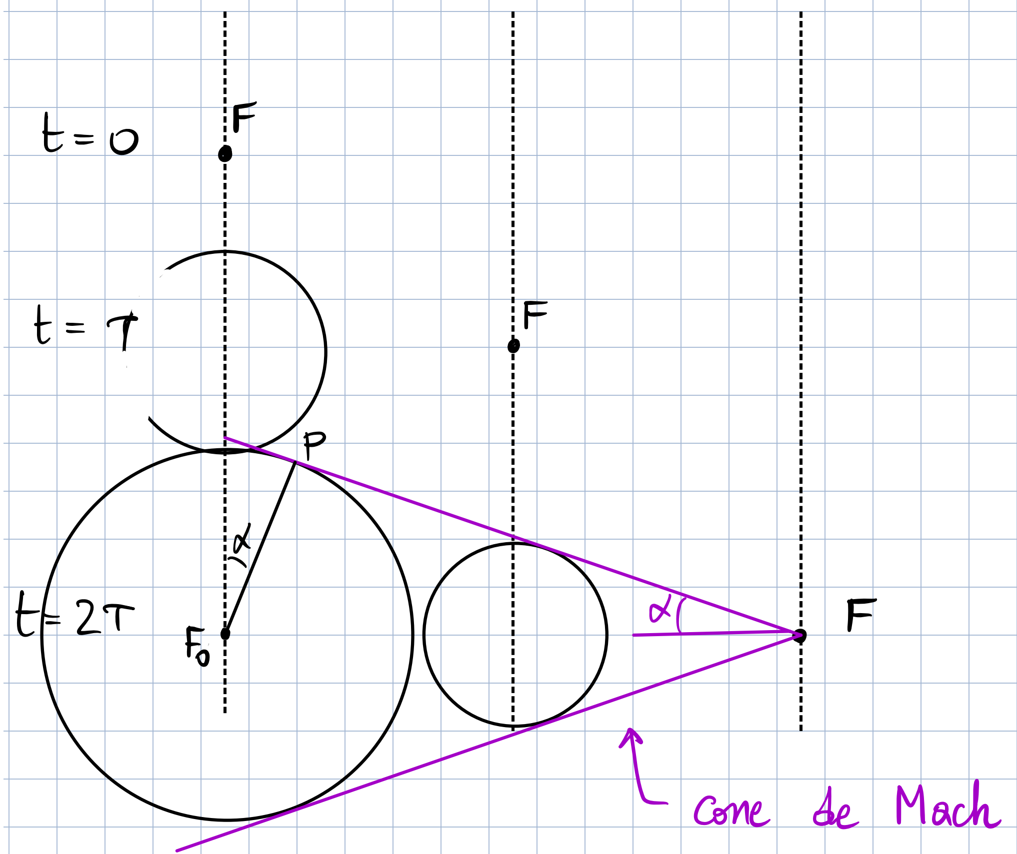
$\mp$: Receptor se afastando $(-)$, aproximando $(+)$

$\pm$: Fonte se afastando $(+)$, aproximando $(-)$

CONE DE MACH

O que acontece quando $V_F \gg V_S$?

A fonte passa a frente de onda por ela gerada



No tempo t, a primeira frente de onda percorre

$$\overline{F_0P} = V_s t$$

No mesmo tempo t, a fonte percorre

$$\overline{F_0F} = V_F t$$

⇒ o ângulo do cone de Mach é

$$\overline{F_0 F} \sin\alpha = \overline{F_0 P} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{v_s}{v_f}}$$

(faz sentido apenas para $\frac{v_s}{v_f} < 1$)

ALGUMAS APLICAÇÕES DO EFEITO DOPPLER

O efeito Doppler é um fenômeno que aplica não apenas para som, mas também para a luz

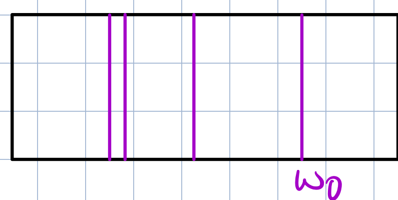
$$\omega_0 = \frac{1 - \vec{V}_F \cdot \hat{n}/c}{\sqrt{1 - \frac{V_F^2}{c^2}}}\,\omega$$

com $\vec{V}_F$ = velocidade fonte

$\hat{n}$ = versor entre fonte e receptor

O efeito Doppler da luz é usado muito na astronomia: emissão de átomos se dá em frequências bem definidas

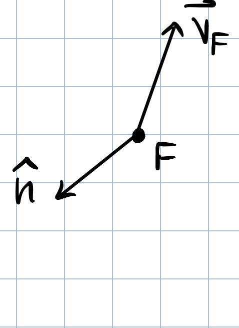
$\Rightarrow$ caso a fonte esteja em movimento respeito a nós, medimos frequências diferentes



Frequências emitidas por uma fonte em repouso

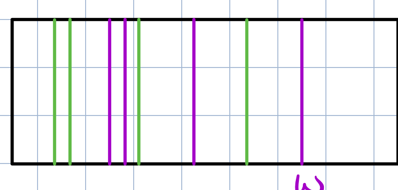
$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{V_F^2}{c^2}}}{1 - \frac{\vec{V}_F \cdot \hat{n}}{c}} \simeq 1 + \frac{\vec{V}_F \cdot \hat{n}}{c} \simeq 1 + \frac{V_F}{c}\,\hat{n}_F \cdot \hat{n}$$

$V_F \ll c$

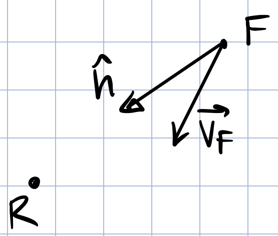


$\hat{n} \cdot \hat{n}_F < 1$ (fonte se afastando)

$\Rightarrow \omega < \omega_0$ REDSHIFT



ω medido



$\hat{n}\cdot\hat{n}_F > 1$ (fonte se aproximando)

$\Rightarrow$ $\omega > \omega_0$ BLUESHIFT