Lista 4

MAT0120 - Álgebra I para a Licenciatura

1º semestre de 2023

1. Para os itens a), b) e c), considere $a = (a_n a_{n-1} \dots a_0)_b$ escrito na base $b > 0$. Prove que:
   a) Se $c \mid b-1$, então $c \mid a \iff c \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n$
   b) $b+1 \mid a \iff (b+1) \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$
   c) Se $c \mid b$, então $c \mid a \iff c \mid a_0$
   d) Conclua os seguintes corolários: Seja $a = a_n a_{n-1} \dots a_0$ escrito na base 10, então:
      a) $3 \mid a_n \dots a_0 \iff 3 \mid a_0 + \cdots + a_n$
      b) $9 \mid a_n \dots a_0 \iff 9 \mid a_0 + \cdots + a_n$
      c) $11 \mid a_n \dots a_0 \iff 11 \mid a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$
      d) $5 \mid a_n \dots a_0 \iff a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
      e) $2 \mid a_n \dots a_0 \iff a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
   e) Mostre que $4 \mid a_n \dots a_0$ na base 10 $\iff 4|a_1 a_0$
   f) $8 \mid a_n \dots a_0 \iff 8 \mid a_2 a_1 a_0$
   g) $6 \mid a_n \dots a_0 \iff 2 \mid a_0$ e $3 \mid a_n + \cdots + a_0$

2. a) Seja a e b ambos não divisíveis por 3. Mostre que $3 \mid a^2 + b^2 + 1$.
   b) Dê um exemplo de inteiros a, b, c tais que $a \mid bc$ e $a + b$ e $a + c$.
   c) Mostre que $2 \mid a \iff 2 \mid a^2$.

3. Prove ou dê um contra exemplo:
   a) Se $x = a^2$, então o resto da divisão de x por 4 deve ser 0 ou 1.
   b) Se $x = a^3$, então o resto da divisão de x por 9 deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, 8\}$.
   c) $6 \mid n(n+1)(2n+1)$ para todos $n \in \mathbb{N}$.
   d) Para $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ vale:
      i) $7 \mid 2^n - 1$;
      ii) $8 \mid 3^{2n} + 7$;
      iii) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$;