UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RESOLUÇÃO DE LISTA DE EXERCÍCIOS

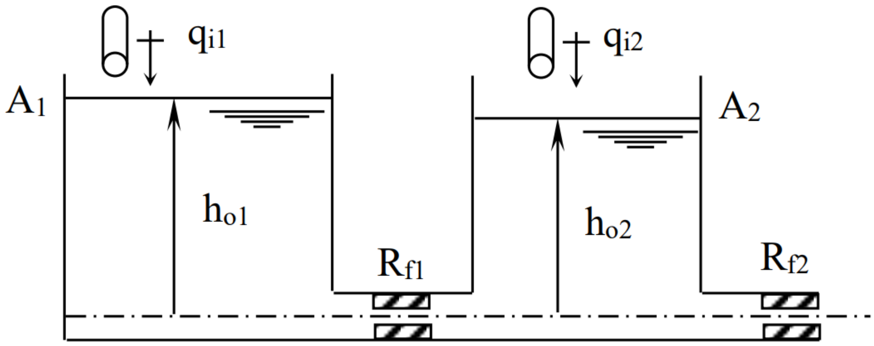
SEM0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I

SEM0232 – Modelos Dinâmicos

Lista de Exercícios 4 - Sistemas Fluídicos e Térmicos

Docentes responsáveis Prof. Dr. Paulo S. Varoto e Prof. Dr. Luiz A. M. Gonçalves

1-) Para o sistema fluídico abaixo, obtenha as F.T. para as entradas do tipo vazão indicadas. Estabeleça as hipóteses que julgar necessárias.



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Os tubos de descarga são curtos, portanto as inércias podem ser desprezadas;
2. Resistência fluídica ao longo dos tubos são desprezíveis;
3. Efeitos inerciais e atrito nos tanques desprezíveis;
4. Líquido homogêneo e incompressível;
5. Dimensões geométricas constantes;
6. Resistência fluídica concentrada nos elementos R_{f1} e R_{f2};
7. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm}).

Efetuando o balanço de massa, podemos escrever:

$$A_1 \frac{dh_{01}}{dt} = q_{i1} - \frac{\rho g}{R_{f1}}(h_{o1} - h_{o2})$$

$$A_2 \frac{dh_{02}}{dt} = q_{i2} + \frac{\rho g}{R_{f1}}(h_{o1} - h_{o2}) - \frac{\rho g}{R_{f2}}(h_{o2})$$

onde ρ representa a densidade volumétrica do fluido.

Aplicando transformada de Laplace nas equações, podemos escrever:

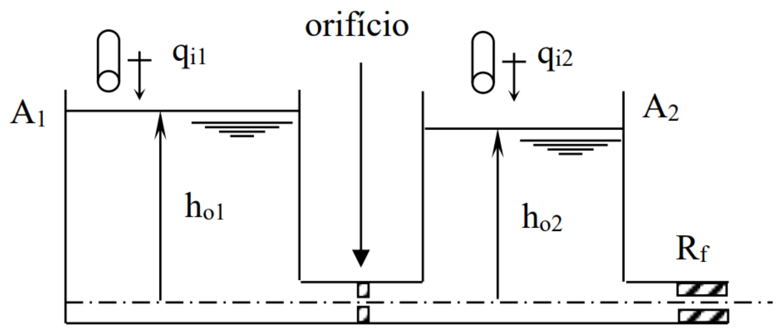
$$A_1 s H_{o1}(s) = Q_{i1}(s) - \frac{\rho g}{R_{f1}} H_{o1}(s) + \frac{\rho g}{R_{f1}} H_{o2}(s)$$
$$A_2 s H_{o2}(s) = Q_{i2}(s) + \frac{\rho g}{R_{f1}} H_{o1}(s) - \frac{\rho g}{R_{f1}} H_{o2}(s) - \frac{\rho g}{R_{f2}} H_{o2}(s)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_1 s + \frac{\rho g}{R_{f1}} & -\frac{\rho g}{R_{f1}} \\ -\frac{\rho g}{R_{f1}} & A_2 s + \frac{\rho g}{R_{f1}} + \frac{\rho g}{R_{f2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{o1}(s) \\ H_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{i1}(s) \\ Q_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$

A partir dessas relações, pode-se zerar entradas e saídas (uma por vez) de modo a se obter as FTs desejadas.

2-) Dado o sistema fluídico da figura abaixo, obtenha um modelo matemático deste modelo, estabelecendo hipóteses simplificadoras. Obtenha em seguida as F.T. linearizadas do sistema para as entradas e saídas mostradas.



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Os tubos de descarga são curtos, portanto as inércias podem ser desprezadas;
2. Resistência fluídica ao longo dos tubos são desprezíveis;
3. Efeitos inerciais e atrito nos tanques desprezíveis;
4. Líquido homogêneo e incompressível;
5. Dimensões geométricas constantes;
6. Resistência fluídica concentrada no elemento R_f;
7. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm}).

A resolução deste problema é similar ao problema 1, a menos do fluxo entre o tanque 1 e tanque 2, que ocorre não mais sob a presença/influência do elemento de resistência, e sim por meio de um orifício, que pode ser modelado via Equação de Bernoulli:

$$q_{o1} \approx C_d A_o \left[\frac{2}{\rho}(p_{o1} - p_{o2})\right]^{\frac{1}{2}}$$

onde ρ representa a densidade volumétrica do fluido, q_{o1} representa o fluxo de 1 para 2, p_{o1} representa a pressão no tanque 1, p_{o2} a pressão no tanque 2 (aqui entende-se tanque 1 e tanque 2 os tanques com respectivos sobescritos na figura). O valor de $C_d A_o$ depende das áreas de escoamento do fluido (entre 1 e 2).

Assumindo que:

$$p_{o1} = \rho g h_{o1}$$

$$p_{o2} = \rho g h_{o2}$$

Assim:

$$q_{o1} = C_d A_o [2g(h_{o1} - h_{o2})]^{\frac{1}{2}}$$

E, consequentemente, pelo balanço de massa:

$$A_1 \frac{dh_{01}}{dt} = q_{i1} - C_d A_o [2g(h_{o1} - h_{o2})]^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 \frac{dh_{02}}{dt} = q_{i2} + C_d A_o [2g(h_{o1} - h_{o2})]^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho g}{R_f}(h_{o2})$$

Podemos ainda substituir:

$$C_d A_o [2g(h_{o1} - h_{o2})]^{\frac{1}{2}} = k_o (h_{o1} - h_{o2})^{\frac{1}{2}}$$

onde $k_o = C_d A_o (2g)^{\frac{1}{2}}$.

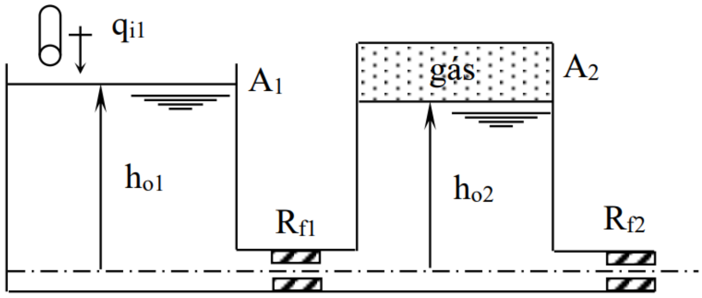
Logo:

$$A_1 \frac{dh_{01}}{dt} = q_{i1} - k_o (h_{o1} - h_{o2})^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 \frac{dh_{02}}{dt} = q_{i2} + k_o (h_{o1} - h_{o2})^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho g}{R_f}(h_{o2})$$

Como temos um uma EDO não linear, podemos resolvê-la de forma numérica ou obter uma EDO linearizada em torno de um ponto de operação (caminho para obtenção da FT).

3-) Para o sistema mostrado abaixo, obtenha a F.T. indicada pela entrada e saída mostradas. Estabeleça hipóteses que julgar necessárias, mas considere o gás ideal.



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. O tubo de descarga é curto, portanto a inércia podem ser desprezadas;
2. Resistência fluídica ao longo do tubo é desprezíveis;
3. Efeitos inerciais e atrito nos tanques desprezíveis;
4. Líquido homogêneo e incompressível;
5. Dimensões geométricas constantes;
6. Resistência fluídica concentrada nos elementos R_{f1} e R_{f2};
7. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm});
8. Gás ideal no tanque 2;
9. Variações muito lentas de temperatura (isotérmico).

A resolução deste problema é similar ao problema 1, a menos do tanque 2, que não é mais aberto ao ambiente (pressão atmosférica) e sim fechado com a presença de um gás (modelado como ideal) no espaço não preenchido pelo fluido. Dado, assim, um gás ideal, pode-se escrever:

$$pV = mRT$$

onde p representa a pressão a que está submetido tal gás, V o volume que o gás ocupa, m a massa do gás dividida pela massa molar, R a constante universal dos gases ideais e T a temperatura do gás.

Para o tanque 1, o balanço de massa não muda:

$$A_1 \frac{dh_{01}}{dt} = q_{i1} - \frac{\rho g}{R_{f1}}(h_{o1} - h_{o2})$$

Já para o tanque 2, vamos considerar que a pressão exercida pelo gás pode ser modelada como uma força f_{gas} tal que:

$$f_{gas} = pA_2 = \frac{mRT}{V} A_2$$

Mas o volume ocupado pelo gás é função da variação de uma determinada altura x, de modo que:

$$V = A_2 x$$

Assim:

$$f_{gas} = \frac{mRT}{x}$$

Logo, podemos escrever:

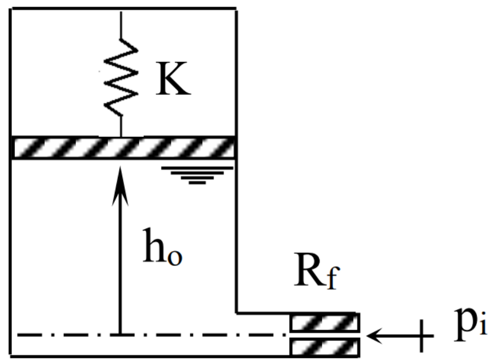
$$A_2 \frac{dh_{02}}{dt} = \frac{\rho g}{R_{f1}}(h_{o1} - h_{o2}) - \frac{\rho g}{R_{f2}}(h_{o2})$$

E também:

$$p_{o2} - p = \frac{1}{C_f} \int_{t_0}^{t} A_2 \, dh_{o2} \, dt$$

onde p_{o2} representa a pressão do fluido no tanque 2.

4-) Obtenha a F.T. relacionando a entrada e saída mostradas no sistema termo-fluídico abaixo. Considere a mola ideal e estabeleça as demais hipóteses que julgar necessárias. Refaça o exercício considerando agora uma mola do tipo $\boldsymbol{F = Kx^2}$.



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Efeitos inerciais e atrito no tanque desprezível;
2. Líquido homogêneo e incompressível;
3. Dimensões geométricas constantes;
4. Resistência fluídica concentrada no elemento R_f;
5. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm});
6. Elemento de rigidez K invariante;
7. Mola do tipo linear e ideal.

Consideremos que o fluido encontra-se sob uma pressão p e que essa mesma pressão p atua no elemento de rigidez pela área A. Pela lei de Newton:

$$m\ddot{x} = pA - Kx$$

onde x representa o deslocamento (com sentido positivo para cima) da mola ideal, m a massa do elemento de contato (entre mola e fluido) e A a área de contato. Considerando acelerações muito pequenas, pode-se reescrever:

$$pA = Kx$$

Ou então:

$$x = \frac{pA}{K}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{K}\frac{dp}{dt}$$

Da conservação do volume (considerando que não há fluxo de saída):

$$\frac{d}{dt}(Ax) = A\frac{dx}{dt} = q_i$$

Substituindo $\frac{dx}{dx}$ por $\frac{A}{K}\frac{dp}{dt}$:

$$\frac{A^2}{K}\frac{dp}{dt} = q_i$$

Onde:

$$\rho q_i = \frac{1}{R_f}(p_i - p)$$

Logo:

$$\rho\frac{A^2}{K}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{R_f}(p_i - p)$$

Ou então:

$$\rho A\frac{dx}{dt} = \frac{1}{R_f}p_i - \frac{1}{R_f}\left(\frac{Kx}{A}\right)$$

Aplicando transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$\rho AsX(s) = \frac{1}{R_f}P_i(s) - \frac{K}{R_f A}X(s)$$

Considerando agora uma mola do tipo $F = Kx^2$, reescrevemos:

$$pA = Kx^2$$

Ou então:

$$x = \sqrt{\frac{pA}{K}}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{A}{K}}\,p^{-\frac{1}{2}}\frac{dp}{dt}$$

Logo:

$$A\frac{dx}{dt} = A\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{A}{K}}\,p^{-\frac{1}{2}}\frac{dp}{dt} = q_i$$

Assim:

$$\rho A \frac{1}{2} . \sqrt{\frac{A}{K}}\, p^{-\frac{1}{2}} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{R_f}(p_i - p)$$

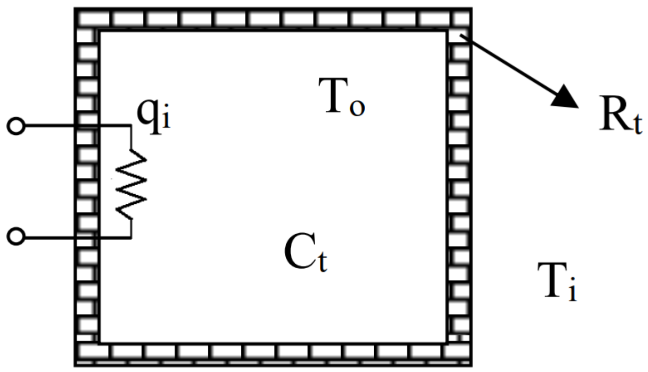
Ou então:

$$\rho A \frac{dx}{dt} = \frac{1}{R_f} p_i - \frac{1}{R_f}\left(\frac{Kx^2}{A}\right)$$

Aplicando transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$\rho A s X(s) = \frac{1}{R_f} P_i(s) - \frac{K}{R_f A} X(s) X(s)$$

5-) Obtenha as F.T. para o sistema térmico abaixo mostrado. Estabeleça hipóteses necessárias.



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Todos os elementos são puros e ideais;
2. As áreas de troca de calor são constantes;
3. Não há perdas térmicas no processo.

Do balanço de energia, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}(C_t T_o) = q_i - \frac{1}{R_t}(T_o - T_i)$$

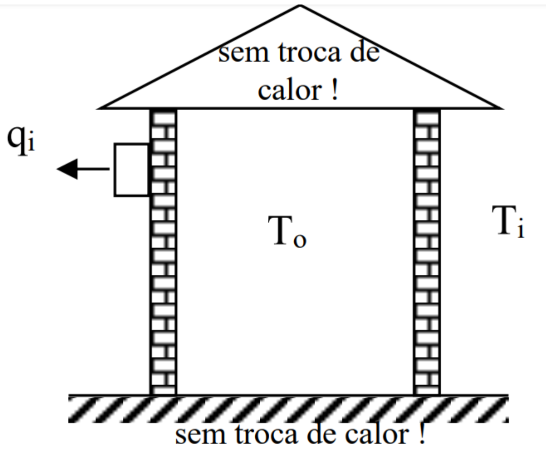
Ou então:

$$C_t \frac{dT_o}{dt} = q_i - \frac{1}{R_t}(T_o - T_i)$$

Aplicando transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$C_t s T_o(s) = Q_i(s) - \frac{1}{R_t} T_o(s) + \frac{1}{R_t} T_i(s)$$

6-) O modelo mais simples do sistema de arrefecimento de uma sala considera as paredes como resistências térmicas puras e a temperatura da sala como sendo uniforme. Supondo que o ar condicionado retira calor a uma taxa q_i, obtenha as F.T. para o sistema térmico da figura. São conhecidos V (volume total da sala), A (área total de troca de calor das paredes da sala), e (espessura das paredes da sala), ρ_{ar} (densidade do ar) e c_{ar} (calor específico do ar).



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Todos os elementos são puros e ideais;
2. As áreas de troca de calor são constantes;
3. Não há perdas térmicas no processo;
4. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm});
5. A sala possui 4 paredes;
6. A taxa de retirada de calor q_i é invariante no tempo.

Vamos supor que o ambiente externo possui temperatura T_i maior que T_o, portanto existe um fluxo de energia de fora para dentro. Pelo balanço de energia:

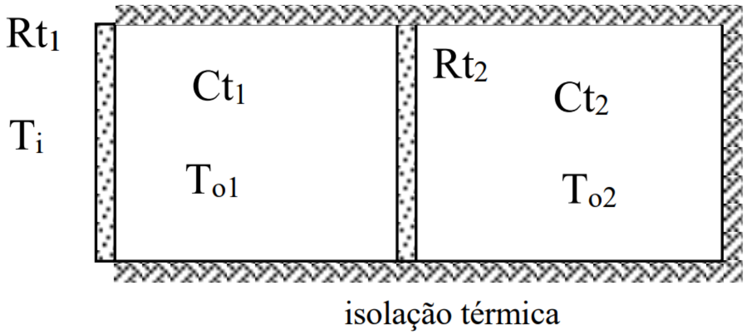
$$\rho_{ar} c_{ar} V \frac{dT}{dt} = -q_i + \frac{T_o - T_i}{R_t}$$

Onde:

$$R_t = 4.\left(\frac{1}{hA} + \frac{e}{kA} + \frac{1}{hA}\right)$$

Em que h representa o coeficiente de película do ar e k o coeficiente de condutividade térmica da parede. O valor R_t possui uma constante 4 multiplicando o fator $\left(\frac{1}{hA} + \frac{e}{kA} + \frac{1}{hA}\right)$ pois assume-se que a sala possui 4 paredes.

7-) Para os sistemas térmicos abaixo obtenha as F.T. indicadas. Estabeleça hipóteses.



SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Todos os elementos são puros e ideais;
2. As áreas de troca de calor são constantes;
3. Não há perdas térmicas no processo;
4. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm});

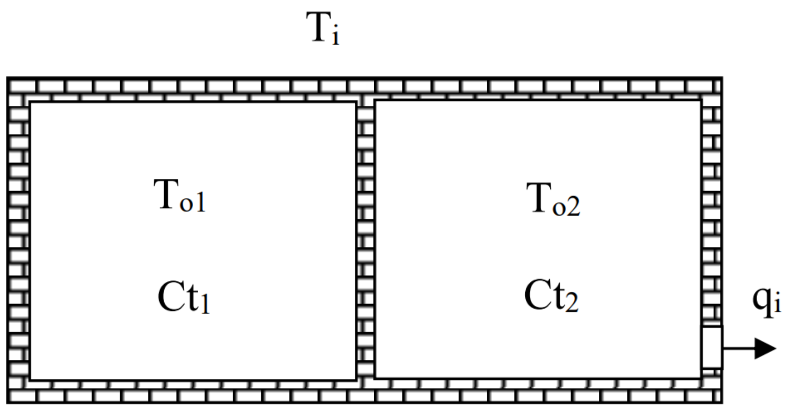
Da conservação da energia (balanço):

$$C_{t1}\frac{dT_{o1}}{dt} = -\frac{1}{R_{t1}}(T_{o1} - T_i) + \frac{1}{R_{t2}}(T_{o2} - T_{o1})$$

$$C_{t2}\frac{dT_{o2}}{dt} = -\frac{1}{R_{t2}}(T_{o2} - T_{o1})$$

Aplicando transformada de Laplace com condições iniciais nulas e colocando na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} C_{t1}s + \frac{1}{R_{t1}} + \frac{1}{R_{t2}} & -\frac{1}{R_{t2}} \\ -\frac{1}{R_{t2}} & C_{t2}s + \frac{1}{R_{t2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{o1}(s) \\ T_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{R_{t1}} T_i(s) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Rt – Resistência Térmica de cada parede

SOLUÇÃO:

Vamos considerar algumas hipóteses simplificadoras:

1. Todos os elementos são puros e ideais;
2. As áreas de troca de calor são constantes;
3. Não há perdas térmicas no processo;
4. Influências externas invariantes (p_{atm}, t_{atm});
5. Assume-se que $T_{o1} > T_{o2}$.

Da conservação da energia (balanço):

$$\frac{d}{dt}(C_{t2}T_{o2}) = -q_i - \frac{1}{3R_t}(T_{o2} - T_i) + \frac{1}{R_t}(T_{o1} - T_{o2})$$

$$\frac{d}{dt}(C_{t1}T_{o1}) = -\frac{1}{3R_t}(T_{o1} - T_i) - \frac{1}{R_t}(T_{o1} - T_{o2})$$