MAT0164 - Prova 1 (26/04/2023)

Nome: Soluções
Número USP:
Assinatura:

1) (2 pontos) Definimos o conectivo lógico indicado pelo símbolo $\bigtriangledown$, de acordo com a seguinte tabela verdade:

p	q	$p \bigtriangledown q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(a) Verifique que $p \bigtriangledown p$ e $\neg p$ são sentenças equivalentes.

(b) Simplifique as fórmulas

$$(p \bigtriangledown p) \bigtriangledown (q \bigtriangledown q) \quad \text{e} \quad (p \bigtriangledown q) \bigtriangledown (p \bigtriangledown q),$$

apresentando fórmulas equivalentes que se utilizem apenas dos conectivos lógicos $\neg, \wedge$ e $\vee$ e que possuam a menor quantidade possível de ocorrências de p e q.

(c) Encontre uma sentença equivalente a $p \Rightarrow q$ utilizando apenas o conectivo $\bigtriangledown$ e as sentenças p e q.

Solução

Primeiramente, observe que, analisando a tabela verdade descrita, temos $p \bigtriangledown q \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Com esta informação, podemos resolver os itens:

(a) Temos que

$$p \bigtriangledown p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow \neg p.$$

(b) Utilizando o item (a), observe que

$$\begin{aligned}(p \bigtriangledown p) \bigtriangledown (q \bigtriangledown q) &\Leftrightarrow \neg p \bigtriangledown \neg q \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q) \\ &\Leftrightarrow p \wedge q\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}(p \bigtriangledown q) \bigtriangledown (p \bigtriangledown q) &\Leftrightarrow \neg(p \bigtriangledown q) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \\ &\Leftrightarrow p \vee q\end{aligned}$$

(c) Utilizando os resultados dos itens (a) e (b), temos

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ &\overset{(b)}{\Leftrightarrow} (\neg p \bigtriangledown q) \bigtriangledown (\neg p \bigtriangledown q) \\ &\overset{(a)}{\Leftrightarrow} ((p \bigtriangledown p) \bigtriangledown q) \bigtriangledown ((p \bigtriangledown p) \bigtriangledown q) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{p \Rightarrow q \Leftrightarrow ((p \bigtriangledown p) \bigtriangledown q) \bigtriangledown ((p \bigtriangledown p) \bigtriangledown q)}$$

2) (2 pontos) Dados dois conjuntos A e B, a diferença simétrica de A e B é definida como

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

(*a*) Prove que, para todos conjuntos A, B e C, $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$.

(*b*) Sejam $f : X \to Y$ uma função e A e B subconjuntos de Y. Prove que $f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$.

(*c*) Sejam $f : X \to Y$ uma função e A e B subconjuntos de X. Prove que $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$. Mostre com um exemplo que a igualdade nem sempre é válida.

Solução

(*a*) Para provar esta igualdade entre conjuntos, precisamos verificar que $\forall x \Big(x \in (A \triangle B \Rightarrow x \in A \triangle B) \cup (B \triangle C) \Big)$.

Assim, dado $x \in A \triangle C$, da definição de diferença simétrica fornecida no enunciado, temos que $x \in (A - B) \cup (B - A)$, ou seja, $x \in A - C$ ou $x \in C - A$. No primeiro caso, temos que $x \in A$ e $x \notin C$, enquanto no segundo, ficamos com $x \in C$ e $x \notin A$. Em ambas as situações, como nada é mencionado sobre a relação entre x e B, temos duas possibilidades para avaliar: $x \in B$ ou $x \notin B$. Isso nos leva a 4 situações:

(♥) $x \in A$ e $x \notin C$ e $x \in B$: Nesse caso, temos em particular que $x \in B$ e $x \notin C$, o que significa que $x \in B - C$;

(♠) $x \in A$ e $x \notin C$ e $x \notin B$: Nesse caso, temos em particular que $x \in A$ e $x \notin B$, o que significa que $x \in A - B$;

(♦) $x \in C$ e $x \notin A$ e $x \in B$: Nesse caso, temos em particular que $x \in B$ e $x \notin A$, o que significa que $x \in B - A$;

(♣) $x \in C$ e $x \notin A$ e $x \notin B$: Nesse caso, temos em particular que $x \in C$ e $x \notin B$, o que significa que $x \in C - B$.

De (♠) e (♦), então $x \in A - B$ ou $x \in B - A$, daí $x \in (A - B) \cup (B - A)$, garantindo que $x \in A \triangle B$. De (♦) e (♠), temos que $x \in B - C$ ou $x \in C - B$, logo $x \in (B - C) \cup (C - B)$, e portanto $x \in B \triangle C$. Concluímos assim que $x \in A \triangle B$ ou $x \in B \triangle C$, ou seja, $x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$, como queríamos demonstrar.

Esta demonstração provém do seguinte raciocínio:

$$x \in A \triangle C \Rightarrow \begin{cases} x \in A - C \\ \text{ou} \\ x \in C - A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin C \\ \text{ou} \\ x \in C \text{ e } x \notin A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin C \text{ e } \begin{cases} x \in B \\ \text{ou} \\ x \notin B \end{cases} \\ \text{ou} \\ x \in C \text{ e } x \notin A \text{ e } \begin{cases} x \in B \\ \text{ou} \\ x \notin B \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \notin A \text{ e } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in B \text{ e } x \notin C \\ \text{ou} \\ x \notin B \text{ e } x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A - B \\ \text{ou} \\ x \in B - A \\ \text{ou} \\ x \in B - C \\ \text{ou} \\ x \in C - B \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in A \triangle B \\ \text{ou} \\ x \in B \triangle C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C).$$

2ª Solução: Vamos traduzir a igualdade entre conjuntos apresentada em uma fórmula da lógica proposicional. Para isso, observe que devemos verificar que

$$\forall x \Big(x \in A \triangle C \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \Big).$$

Das definições de união, diferença, e diferençaa simétricas entre conjuntos, obtemos

$$\forall x \Big(x \in A \triangle C \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \Big)$$

$$\forall x \Big(x \in (A - C) \cup (C - A) \Rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A) \cup (B - C) \cup (C - A) \Big)$$

$$\forall x \Big(x \in (A - C) \vee x \in (C - A) \Rightarrow x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \vee x \in (B - C) \vee x \in (C - A) \Big)$$

$$\forall x \Big(\big((x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin A) \big) \Rightarrow$$

$$\big((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin A) \big) \Big)$$

Dessa maneira, definindo as sentenças:

$$p : x \in A \qquad q : x \in B \qquad r : x \in C,$$

podemos reescrever a expressão obtida acima como sendo a fórmula

$$f : ((p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)) \Rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p))$$

Agora, basta averiguar se esta sentença corresponde a uma tautologia. Vamos dividir esta sentença em sentenças menores para facilitar os cálculos. Definindo

$$g : (p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p) \quad \text{ e } \quad h : (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p),$$

obtemos as seguintes tabelas verdade:

p	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$r \wedge \neg p$	g
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg p$	$q \wedge \neg r$	$r \wedge \neg p$	h
V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F	F	V

Logo, a tabela verdade para f será

p	q	r	g	h	f
V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Como na última coluna os valores lógicos correspondem a V (verdadeiro) em sua totalidade, concluímos que de fato f trata-se de uma tautologia, significando que a igualdade inicial é verdadeira.

(b) Seja $x \in f^{-1}(A \triangle B)$. Da definição de imagem inversa, existe um $y \in A \triangle B$ tal que $y = f(x)$. Agora, se $f(x) \in A \triangle B$, então $f(x) \in A - B$ ou $f(x) \in B - A$. Portanto, $f(x) \in A$ e $f(x) \notin B$, ou então $f(x) \in B$ e $f(x) \notin A$. No primeiro caso, temos novamente pela definição de imagem inversa que $x \in f^{-1}(A)$ e $x \notin f^{-1}(B)$ ou $x \notin f^{-1}(A)$ e $x \in f^{-1}(B)$. Daí, temos que $x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$. Portanto, $x \in f^{-1}(A) \triangle f^{-1}B$, como desejado.

Reciprocamente, se $x \in f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$, então $x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(A)$. Portanto, $x \in f^{-1}(A)$ e $x \notin f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B)$ e $x \notin f^{-1}(A)$. Da definição de imagem inversa, se $x \in f^{-1}(A)$, então $f(x) \in A$ e analogamente, $x \notin f^{-1}(B)$ implica $f(x) \notin B$. Logo, $f(x) \in A - B$. Da mesma forma, se $x \in f^{-1}(B)$, então $f(x) \in B$ e $x \notin f^{-1}(A)$ implica $f(x) \notin A$. Logo, $f(x) \in B - A$. Assim, se $f(x) \in A - B$ ou $f(x) \in B - A$, então $f(x) \in (A-B) \cup (B-A) \Rightarrow f(x) \in A \triangle B$. Usando novamente a definição de imagem inversa, temos que $x \in f^{-1}(A \triangle B)$.

$$x \in f^{-1}(A \triangle B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \\ \text{ou} \\ x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(A) \text{ e } x \notin f^{-1}(B) \\ \text{ou} \\ x \in f^{-1}(B) \text{ e } x \notin f^{-1}(A) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \in A \text{ e } f(x) \notin B \\ \text{ou} \\ f(x) \in B \text{ e } f(x) \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in A - B \\ \text{ou} \\ f(x) \in B - A \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) \in (A-B) \cup (B-A) \Leftrightarrow f(x) \in A \triangle B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \triangle B).$$

(c)

3) (2 pontos) Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Prove que f é injetora se, e somente se, para todos subconjuntos A e B de X, vale $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Solução

Para provar esta igualdade entre conjuntos, precisamos verificar que, se f é injetora, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ e provar que, se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, então f é injetora.

- Suponha que $f\colon X \to Y$ é uma função injetora. Vamos provar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, ou seja, $\forall x \Big(x \in f(A \cap B) \Leftrightarrow x \in f(A) \cap f(B) \Big)$, ou equivalentemente, que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ e que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$

  – $\boldsymbol{f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)}$ **:** Seja $y \in f(A \cap B)$. Pela definição de imagem direta, existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$. Logo, temos que $x \in A$ e também $x \in B$. Assim, $f(x) \in f(A)$ e $f(x) \in f(B)$. Consequentemente, $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

  – $\boldsymbol{f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)}$ **:** Seja $y \in f(A) \cap f(B)$. Então, temos que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$. Da definição de imagem direta, existe $a \in f(A)$ tal que $y = f(a)$. Além disso, também existe $b \in B$ tal que $y = f(b)$. Daí,

  $$y = f(a) = f(b).$$

  Como por hipótese f é injetora, então isso implica que $a = b$. Assim, $a \in A$, e também $b = a \in B$. Em vista disso, $a \in A \cap B$, o que acarreta $f(a) \in f(A \cap B)$. Mas $f(a) = y$, e segue portanto que $y \in f(A \cap B)$, como desejado.

- Suponha que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Vamos provar que f é injetora. Para isso, precisamos mostrar que para $x_1, x_2 \in X$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sendo $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$, considere $A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$. Então, $A \cap B = \emptyset$. Mas

  $$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset,$$

  logo $f(x_1) \neq f(x_2)$, daí f é injetora.

4) (2 pontos) Sejam A, B e C conjuntos. Determine (e prove) uma condição necessária e suficiente para que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Solução

Observe que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
Assim, para que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$, basta que
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow A \cap C = C.$$
Se $A \cap C = C$, isso significa que todo elemento de A pertence a C, logo $A \subseteq C$. Por outro lado, veja que também ocorre
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$
Assim, para que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$, também precisamos que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \Leftrightarrow A \cup C = A.$$
Se $A \cup C = A$, isso significa que todo elemento de C pertence a A, logo $C \subseteq A$. Vamos provar que de fato esta igualdade entre conjuntos é válida quando $A \subseteq C$ e $C \subseteq A$, ou seja, se $A = C$. Para isso, precisamos verificar que $\forall x \Big(x \in A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup C \Big)$, ou equivalentemente, que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ e que $(A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C)$.

- $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C}$ **:** Se $x \in A \cap (B \cup C)$, então $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Assim, $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in C$. Portanto, concluímos que $x \in A$ e $x \in B$, daí $x \in A \cup B$; ou então $x \in A \subseteq C$, logo $x \in (A \cup B) \cap C$.

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{e} \\ x \in B \cup C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{e} \\ x \in B \text{ ou } x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \in B \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x \in A \text{ e } x \in C \\ A \subseteq C \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{ou} \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$$

- $\boldsymbol{(A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C)}$ **:** Se $x \in (A \cap B) \cup C$, então $x \in C$ e $x \in A \cup B$. Assim, $x \in C$ e $x \in A$ ou $x \in B$. Portanto, concluímos que $x \in C$ ou $x \in B$, daí $x \in B \cup C$; ou então $x \in C \subseteq A$, logo $x \in (B \cup C) \cap A$.

$$x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ \text{ou} \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ e } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \text{ ou } x \in C \\ \text{e} \\ \begin{cases} x \in A \text{ ou } x \in C \\ C \subseteq A \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in B \cup C \\ \text{e} \\ x \in A \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

5) (2 pontos) Em cada item, demonstre a afirmação caso esta seja verdadeira. Caso contrário, apresente um contraexemplo:

(a) Para todos conjuntos A, B e C, se $A \cup B = A \cup C$, então $B = C$;

(b) Para todos conjuntos A, B e C, se $A - B = A - C$, então $B = C$;

(c) Para todos conjuntos A, B e C, se $A \triangle B = A \triangle C$, então $B = C$.

Solução

(a) Falso.
Observe que, se $B, C \subseteq A$, então $A \cup B = A \cup C = A$, mas B e C podem ser escolhidos como subconjuntos diferentes se A tiver pelo menos 2 elementos. Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ e $C = \{2\}$. Nesse caso, $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$ e $A \cup C = \{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$, mas $B \neq C$.

(b) Falso.
Observe que, se A for disjunto de B e de C (ou seja, não tiverem nenhum elemento em comum) então $A - B = A - C = A$, mas B e C podem ser quaisquer conjuntos, não necessariamente iguais. Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{4\}$. Então $A - B = \{1, 2\} - \{3\} = \{1, 2\}$ e $A - C = \{1, 2\} - \{4\} = \{1, 2\}$, mas $B \neq C$.

(c) Verdadeiro. Suponha que $A \triangle B = A \triangle C$. Precisamos provar que $B = C$, ou seja, devemoss verificar que

$$\forall x(x \in A \triangle B \Leftrightarrow x \in A \triangle C) \Rightarrow \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in C)$$

Considere $x \in B$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$, e portanto $x \notin A \triangle B = A \triangle C$. Daí, $x \in A \cap C$. Logo, $x \in C$. Por outro lado, se $x \notin A$, então $x \in B - A$, daí, $x \in A \triangle B = A \triangle C$. Como $x \notin A$, então $x \in C - A$, logo $x \in C$.
Agora, seja $x \in C$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup C$, e portanto $x \notin A \triangle C = A \triangle B$. Daí, $x \in A \cap B$. Logo, $x \in B$. Por outro lado, se $x \notin A$, então $x \in C - A$, daí, $x \in A \triangle C = A \triangle B$. Como $x \notin A$, então $x \in B - A$, logo $x \in B$.
Portanto, $B = C$.

6) (2 pontos) Dados A, B e C conjuntos, definimos o seguinte novo conjunto, chamado de *conjunto de Colucci-Farias-Smigly* de A, B e C, de acordo com a seguinte igualdade:

$$\underset{A\quad C}{\overset{B}{\bigstar}} = (C \cap B) - ((B - A) \cup (C - A)).$$

Prove que, para todos conjuntos A, B e C,

$$\mathcal{P}\left(\underset{A\quad C}{\overset{B}{\bigstar}}\right) = \underset{\mathcal{P}(A)\quad \mathcal{P}(C)}{\overset{\mathcal{P}(B)}{\bigstar}}.$$

Solução

Observe que, se $x \in \underset{A\quad C}{\overset{B}{\bigstar}}$ então $x \in C \cap B$ e $x \notin (B - A) \cup (C - A)$. Então $x \notin B - A$ e $x \notin C - A$. Logo, $x \notin B$ ou $x \in B \cap A$ ou $x \notin C$ ou $x \in C \cap A$. Assim, $x \in C \cap B$ ou $x \in B \cap A$ ou $x \in C \cap A$, portanto $x \in A \cap B \cap C$.

$$x \in \underset{A\quad C}{\overset{B}{\bigstar}} \Leftrightarrow x \in (C \cap B) - ((B - A) \cup (C - A)) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in C \cap B \\ \text{e} \\ x \notin ((B - A) \cup (C - A)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in C \text{ e } x \in B \\ \text{e} \\ x \notin (B - A) \text{ e } x \notin C - A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in C \text{ e } x \in B \\ \text{e} \\ \begin{cases} x \notin B \\ \text{ou } x \in B \cap A \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \notin C \\ \text{ou } x \in C \cap A \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in C \text{ e } x \in B \\ x \in B \text{ e } x \in A \\ x \in C \text{ e } x \in A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in C \cap B \\ x \in B \cap A \\ x \in C \cap A \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap B \cap C.$$

Assim,

$$\underset{A\quad C}{\overset{B}{\bigstar}} = A \cap B \cap C.$$

Precisamos provar o seguinte:

$$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C).$$

Seja $X \in \mathcal{P}(A \cap B \cap C)$. Pela definição de conjunto das partes, $X \subseteq A \cap B \cap C$. Daí, $X \subseteq A, X \subseteq B$ e $X \subseteq C$. Consequentemente, $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \in \mathcal{P}(B)$ e $X \in \mathcal{P}(C)$. Logo, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$. A recíproca é análoga.