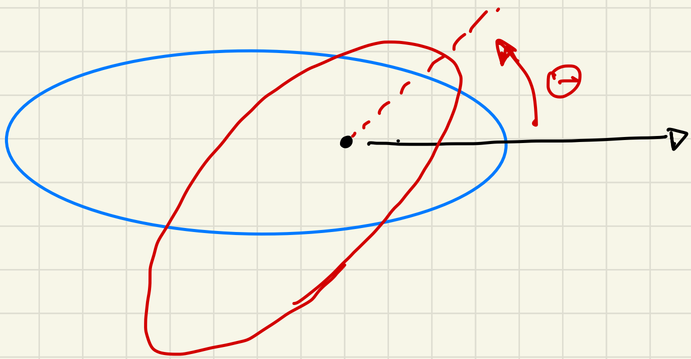
5.2 Teorema de Noether

2/5/23

Uma simetria de um sistema é uma transformação que leva soluções em soluções. Por exemplo, no problema de Kepler se rodarmos uma órbita de um ângulo θ ela continua sendo uma solução.



Uma simetria é dita contínua se ela depende continuamente dos parâmetros (a_j) que a definem. Por convenção para $a_j = 0$ a simetria não faz nada.

Teorema de Noether (1918): dada uma simetria contínua de um sistema mecânico existe uma quantidade conservada associada a ela.

Prova: É por construção, mostrando qual é a quantidade conservada!

Como uma simetria ~~contínua~~ leva ~~continuamente~~ soluções em soluções ela não muda o valor da ação!

Consideremos um sistema com N graus de liberdade $q_1 \ldots q_N$. Pela transformação $t \to t'$

$$q_k(t) \longrightarrow q'_k(t')$$

Defino $\delta q_k = q'_k(t) - q_k(t)$ mesmo tempo!!

$$\delta S = S[q'_k] - S[q_k] = \int dt' \, L(q'_k, \dot{q}'_k, t') - \int dt \, L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

$t' \to t$ na segunda integral

$$= \int dt \left\{ L(q'_k, \dot{q}'_k, t) - L[q_k, \dot{q}_k, t] \right\} = 0$$

Da hipótese da transformação ser uma simetria

$$\delta S = \int dt \left\{ L(q_k, \dot{q}_k, t) - L(q'_k, \dot{q}'_k, t) \right\}$$

$$= \int dt \, \frac{d\Lambda}{dt} (t)$$

Onde a função Λ deve ser determinada explicitamente!

Avaliemos agora $\delta S'$ usando as eq's do movimento (EOM)

$$\delta S' = \int dt \left\{ L(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + \delta\dot{q}_k, t) - L(q_k, \dot{q}_k, t) \right\}$$

Taylor
$$= \int dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right\}$$

EOM
$$= \int dt \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \right\}$$

$$= \int dt \, \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k\right].$$ Mas isso é igual a ①

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k\right] = \frac{d\Lambda}{dt} \implies$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k - \Lambda\right] = 0$$ CQD!!

<u>Exemplo 1</u>: Sistema invariante por "translações"

Neste caso U deve ser constante! Sob translação

$$t \to t' = t \qquad q'_k(t) = q_k(t) + \delta a_k$$

Neste caso $\dot{q}'_k = \dot{q}_k$ pois δq_k independe do tempo

Explicitamente: $\delta L(q'_k, \dot{q}'_k, t) = \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k^{\,0} = \delta q_k \frac{\partial L}{\partial q_k}$

Mas para ser invariante devemos ter L independe de q_k. Logo

$\Lambda \equiv 0$. Com isso a quantidade conservada é

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right] = 0$$

Exemplo 2 translações temporais $t' = t + \delta t$

$$q'_k(t') = q_k(t)$$

$$q'_k(t) = q_k(t - \delta t) = q_k - \dot{q}_k \delta t \Rightarrow \delta q_k = -\dot{q}_k \delta t$$

$$\Rightarrow \dot{q}'_k(t) = \dot{q}_k - \ddot{q}_k \delta t$$

i) Explicitamente: para L independente do tempo

$$\int dt \left[L(\dot{q}'_k, q'_k) - L(\dot{q}_k, q_k)\right] = \int dt \left(-\frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k \delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \delta t\right)$$

$$= \int dt \frac{d}{dt}\left[-\delta t\, L\right]$$

ii) Logo $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k - \Lambda\right] = 0$

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \delta t - L\,\delta t\right] = 0 \Rightarrow \text{quantidade conservada é}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$$

Para $L = m_k \frac{\dot{q}_k^2}{2} - U$

A quantidade conservada é $\frac{m_k \dot{q}_k^2}{2} + U$! A energia!

3) Rotações: Consideremos uma partícula com coordenadas cartesianas x^k $(k=1,2,3)$. Sob uma rotação $x^k \to x'^k$ tal que $x^k x^k = x'^k x'^k$. (1)

Considerando as transformações contínuas, sua forma (*) infinitesimal é $x^k \longrightarrow x'^k = \left(\delta^k_j + \Delta\omega^{kj}\right) x^j$ (2)

onde $\Delta\omega^{kj}$ é infinitesimal. Substituindo (2) em (1)

$$x^k x^k = \left(x^k + \Delta\omega^{kj} x^j\right)\left(x^k + \Delta\omega^{kl} x^l\right)$$

$$= x^k x^k + 2\,\Delta\omega^{kl} x^k x^l + \text{ordem superior}$$

$\Rightarrow \Delta\omega^{kl} x^k x^l = 0$ como $x^k x^l$ é simétrico em trocas $k \leftrightarrow l \Rightarrow \Delta\omega^{kl}$ é anti-simétrico $\Delta\omega^{kl} = -\Delta\omega^{lk}$

Exemplo rotação em torno do eixo z 4/5/23

(*) Como o espaço é euclidiano $x^k = x_k$ .... Não vou prestar atenção c/ índices

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\theta \ll 1} \quad \begin{aligned} x' &= x - \theta y \\ y' &= \theta x + y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Δw^{kl} é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como esperado!

Podemos escrever esta transformação como

$$\Delta w^{kl} = -\varepsilon^{3kl}\,\theta$$

Mostre que uma rotação infinitesimal em torno do eixo

$i = 1, 2, 3$ (x, y, z) possui

$$\Delta w^{kl} = -\,\epsilon^{ikl}\,\theta_i.$$

No caso de rotações ao redor do eixo z

$$\delta x^i = x'^i - x^i = -\,\varepsilon^{3il}\,x^l\,\theta$$

Para uma partícula movendo-se no campo central $U(r)$ sua Lagrangiana é invariante por rotações pois $\vec{v}^2$ e r o são:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - U(r)$$