

1 Lista de Exercícios 5 - A última!

1. Para um elemento de fluido em “rotação de corpo sólido” com velocidade angular Ω , calcule ambos os lados do teorema de Stokes $C = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int \int \boldsymbol{\zeta} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ para demonstrar que $\zeta = 2\Omega$.
2. Começando com a equação do momento escrito como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_r) \times \mathbf{v}_r = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\Phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}_r^2 \right),$$

equação 4.56 (V), calcule o seu rotacional e use a identidade vetorial $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ para derivar a equação da vorticidade 4.58. Use $2\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}_a$, a vorticidade absoluta.

Depois, use a equação da conservação de massa e derive a equação da vorticidade para um fluido invíscido.

3. Alternativamente, vamos fazer essa derivação usando a abordagem da diferenciação cruzada em vez de usar a identidade vetorial.

1. Comece com o conjunto de equações horizontais do momento em função da pressão para um sistema homogêneo, em rotação, hidrostático, e invíscido, incluindo os termos advectivos. Aplique $\partial/\partial y$ na componente x e $\partial/\partial x$ na componente y. Manipule as equações para chegar à equação de vorticidade. Neste ponto de derivação, você deve ser capaz de agrupar alguns termos da sua equação em quatro categorias para representar a vorticidade como: tendência da vorticidade absoluta, estiramento do tubo de vórtice, inclinação e solenóide baroclínico. Identifique-os. Reduza esta equação para caso barotrópico.

2. Em seguida, considere a equação da continuidade verticalmente integrada, assumindo que $\eta = h + \eta_b + H$, onde η é a altura da superfície do mar, η_b é a topografia do fundo. O oceano quando em repouso tem profundidade H, e h é a espessura da camada do oceano em movimento (Fig. 3.1 (V)). Para um oceano de fundo plano, determine a equação da variação da espessura da camada

$$\frac{Dh}{Dt} = -h \nabla \cdot \mathbf{v}$$

3. Você perceberá que a equação de tendência da espessura da camada acima, obtido via conservação de massa, é gerada pela divergência do fluxo. Da mesma forma, a tendência de vorticidade absoluta também foi gerado pela divergência do fluxo. Combine as duas equações e deduza a equação para a tendência de vorticidade potencial.

4. Derive a equação 4.92 (V). Comece pelo lado esquerdo da equação e chegue no direito.

5. **Vorticidade Potencial Hidrostático** Podemos encontrar a forma da vorticidade potencial apropriada para fluidos hidrostáticos, ou seja, sob escala hidrostática. Considere um fluido incompressível, barotrópico e invíscido no plano f. Utilizaremos a temperatura potencial como a propriedade conservada. Este problema não é apenas uma cópia da derivação de Vallis. Você deverá usar todos os componentes de $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ e não o ω_{hy} definido por Vallis. Chegue ao PV hidrostático, dimensionando sua componentes. Claro que a resposta é 4.117, mas você deve chegar lá apenas com argumentos de escala, comparando sistematicamente os termos. Este é um bom exercício de dimensionalização. Use as escalas típicas para as variáveis, ou seja, números adimensionais.