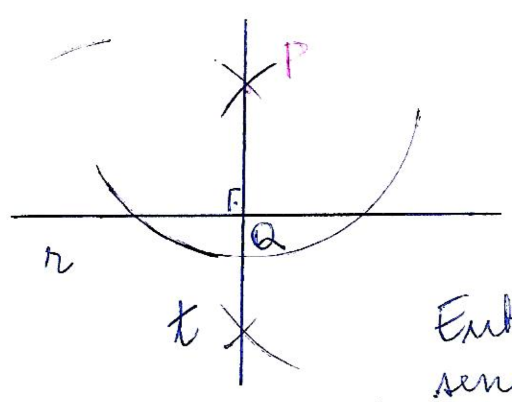
**E1 L2** | Mostre que uma translação na direção de um vetor não nulo não tem pontos fixos.

Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Por definição $T_{\vec{v}} P = P + \vec{v}$.
$P$ é ponto fixo de $T_{\vec{v}} \Leftrightarrow T_{\vec{v}} P = P \Leftrightarrow P + \vec{v} = P$
$\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$, contra a hipótese.
Portanto: Translação na direção de vetor não nulo não tem pontos fixos.

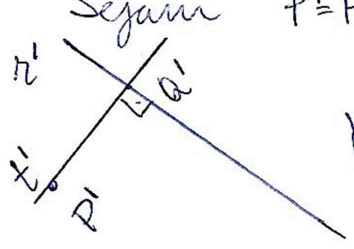
Obs.: Pode ser pensado de outro jeito
Suponha por absurdo que $T_{\vec{v}} P = P$
Então $P + \vec{v} = P \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ Abs.

**E3 L2** | Toda isometria preserva distância de ponto a reta




Def: $d(P,r)$
Dados uma reta $r$ e $P$ um ponto fora dela, seja $t$ a reta perpendicular a $r$ que passa por $P$.
Então: sendo $Q = t \cap r$ a distância de $P$ a $r$ é definida por $d(P,r) = d(P,Q)$.

Seja $F$ uma isometria e com as notações anteriores sejam $P$ um ponto e $r$ uma reta. Sejam $t$ perpendicular a $r$ por $P$ e $Q = r \cap t$.
Sejam $P' = F(P)$, $Q' = F(Q)$ $t' = F(t)$ $r' = F(r)$.




Pelo teorema 2.3 a isometria $F$ preserva perpendicularismo o que implica que $r' \perp t'$. Além disso,

$Q \in r \Rightarrow Q' \in r'$ $\quad Q \in t \Rightarrow Q' \in t'$ $\quad \therefore Q' = r' \cap t'$.
e, por definição, $d(P', r') = d(P', Q')$
$= d(P, Q) = d(P, r)$.
por def de isometria

Logo, F preserva distância de ponto a reta.

E4 L2 | Verifique que se S é circunferência de centro O e raio r e F é isometria então F(S) é circunferência. Com que centro e com que raio? Em particular esboce um vetor $\vec{v}$, uma circunferência S e sua imagem pela translação $T_{\vec{v}}$.

Sejam F isometria, $P' = F(P)$, $O' = F(O)$.

$$P \in S \Leftrightarrow OP = r \underset{F \text{ é iso}}{\Longrightarrow} O'P' = OP = r$$

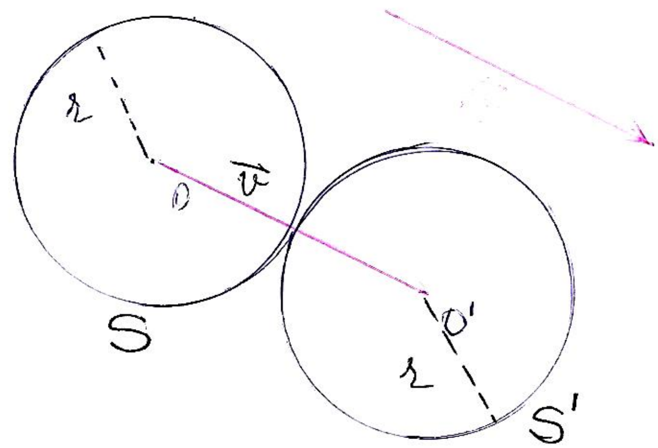
$O'P' = r$ significa que $P'$ é pt da circunferência de centro $O'$ e raio $r$.
$\in F(S)$

Então: ① $F(S) \subset S'$, $S'$ circ centro $O'$ e raio $r$.

Com raciocínio idêntico, sendo $F^{-1}$ a inversa de F, temos $F^{-1}(S') \subset S$, donde segue que $F(F^{-1}(S')) \subset F(S)$ ou seja $S' \subset F(S)$ ②

① e ②: $F(S) = S'$.

Logo a imagem de S por uma isometria ~~leva~~ é a circunferência de centro $O'$ e raio $r$.




Para esboçar S' basta Transladar O, determinando $O' = O + \vec{v}$, e manter o raio de S.

E5 L2 | Da questão 4 ... Para cônicas temos o mesmo resultado Formule questões análogas à Q4 (+ esboços c/ $T_{\vec{v}}$) que permitam concluir que isometria preserva a) elipse b) hipérbole c) parábola.

c) "Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com foco O e diretriz r. Se F é uma isometria a imagem de $\mathcal{P}$ por F é a parábola de foco $O' = F(O)$ e diretriz $r' = F(r)$."

Há que verificar a veracidade de tal enunciado.

De fato: F isometria, r reta $\Rightarrow r' = F(r)$ é reta.

Sabemos que $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P,O) = d(P,r)$.

Sendo $P' = F(P)$, temos pelo Ex. 3 que

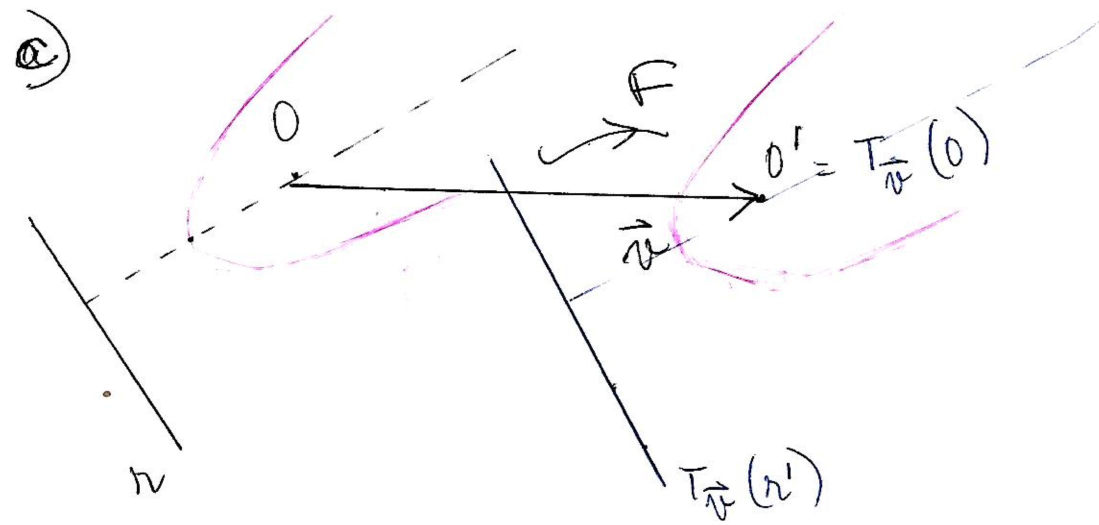
$$d(P', r') = d(P, r) \underset{P \in \mathcal{P}}{\uparrow=} d(P,O) \underset{F \text{ é iso.}}{\uparrow=} d(P', O')$$

$d(P', r') = d(P', O') \Rightarrow P'$ é pt da parábola de foco $O'$ e diretriz $r'$.

Ou seja: $F(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}'$ parábola de foco $O'$ e diretriz $r'$

Com raciocínio análogo para a inversa $F^{-1}$ temos $F^{-1}(\mathcal{P}') \subset \mathcal{P}$ donde segue que $\mathcal{P}' \subset F(\mathcal{P})$

Logo, $\mathcal{P}' = F(\mathcal{P})$ e o enunciado é válido.




a) Elipse: Dados focos $O_1$ e $O_2$ e nº real $a>0$, a elipse $\mathcal{E}$ é o lugar geométrico dos pontos $P$ do plano tais que $d(P, O_1) + d(P, O_2) = a$.

Sejam $O_1' = F(O_1)$ e $O_2' = F(O_2)$, $F$ isometria.

A ideia aqui é:

A imagem de $\mathcal{E}$ por uma isometria $F$ é a elipse $\mathcal{E}'$ de focos $O_1'$ e $O_2'$ com distância dada $\underline{a}$. I.e.: Se $P' = F(P)$

$$d(P', O_1') + d(P', O_2') \underset{F \text{ é iso.}}{=} d(P, O_1) + d(P, O_2) = a$$

$F(\mathcal{E})' = \mathcal{E}'$.

b) Hipérbole: Focos $O_1, O_2$ $a>0$

$\mathcal{H} = \{P \mid |d(P, O_1) - d(P, O_2)| = a$

$F$ $\underline{\underline{\text{iso}}}$ $P' = F(P)$ $O_1' = F(O_1)$ $O_2' = F(O_2)$

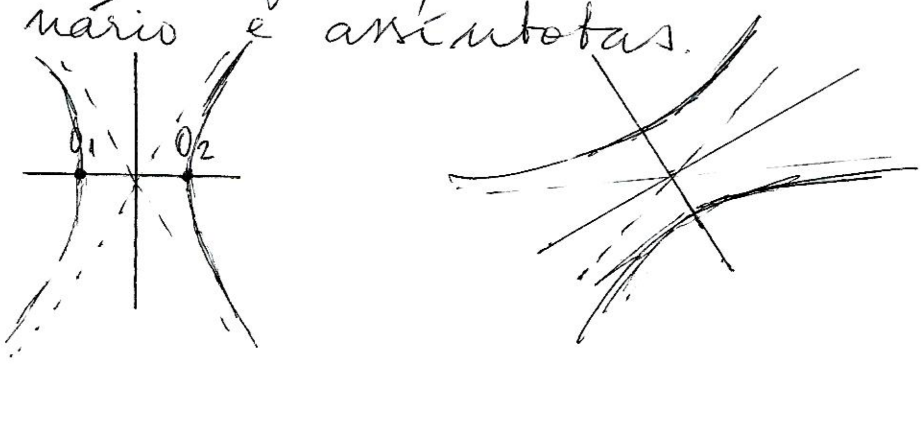
$$|d(P', O_1') - d(P', O_2')| = |d(P, O_1) - d(P, O_2)| = a.$$

$$\Rightarrow P' \in \mathcal{H}' \ \ldots \text{etc} \ldots \quad F(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'.$$

<u>Obs.</u>: Um bom estudo de cônicas leva a compreender que a distância entre os focos e o nº dado $a > 0$ definem

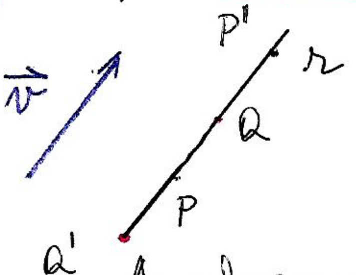
- eixo maior e eixo menor no caso da elipse. A isometria mantém a forma pois o nº $a > 0$ e os focos e os eixos ficam relacionados da mesma forma


- novos focos, eixo real eixo imaginário e assíntotas.



E2 | $\mathcal{A}$ é invariante por F se $F(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
L2 | Mostre que uma translação $T_{\vec{v}}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, deixa invariantes as retas ~~as retas~~ paralelas à direção de $\vec{v}$ e somente essas retas.
(É a prop. 3.4 da pág 33 do livro Alves & Galvão)

1º) Seja $r$ paralela à direção de $\vec{v}$. Queremos mostrar que $T_{\vec{v}}(r) = r$.




Dado $P \in r$, $P' = T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v} \in r$ pois $\vec{v}$ é paralelo a $r$.

Segue $T_{\vec{v}}(r) \subset r$ ①

Analogamente, dado $Q \in r$ o ponto $Q' = Q + (-\vec{v})$ também está em $r$, pois $r \parallel \vec{v}$. Como $T_{\vec{v}} Q' = Q + (-\vec{v}) + \vec{v} = Q$, temos $Q = T_{\vec{v}} Q' \in T_{\vec{v}}(r)$.

e $\therefore$ $r \subset T_{\vec{v}}(r)$ ②

① e ② $\Rightarrow$ $T_{\vec{v}}(r) = r$.

2º) Seja $s$ uma reta invariante por $T_{\vec{v}}$.
Queremos mostrar que $s$ é paralela a $\vec{v}$.

$s$ invariante por $T_{\vec{v}}$ ~~quer dizer~~ temos que para todo ponto $P \in s$ a imagem $T_{\vec{v}} P = P + \vec{v} = P' \in s$.

Seja $\vec{w}$ um diretor de $s$.

Podemos escrever: $P' = P + \lambda \vec{w}$

Daí: $\vec{v} = P' - P = \lambda \vec{w}$ e $\therefore$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos e temos que $s$ é paralela a $\vec{v}$.