MAP2210 - Aplicações de Álgebra Linear
1º Semestre de 2023
Cuidado: Não revisado!

1 Séries de Matrizes

No que segue, diremos que uma sequência de matrizes

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{11}^{[n]} & b_{12}^{[n]} & \dots & b_{1k}^{[n]} \\ b_{21}^{[n]} & b_{22}^{[n]} & \dots & b_{2k}^{[n]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}^{[n]} & b_{k2}^{[n]} & \dots & b_{kk}^{[n]} \end{pmatrix}$$

converge para uma matriz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix}$

se

$d(B_n, B) := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (b_{ij}^{[n]} - b_{ij})^2} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Isto equivalente a dizer que

$$b_{ij}^{[n]} \to b_{ij} \text{ quando } n \to \infty, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Exemplo 1 $B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{n+1} \\ \frac{1}{n} & 2\cos\frac{1}{n} \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ quando $n \to \infty$.

Definição 1 *Para $n = 0, 1, 2, \dots$, sejam $A_n \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$ e seja $S \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$.*

Dizemos que a série de matrizes

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

converge para a matriz S se a sequência de somas parciais

$$S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n = \sum_{j=0}^{n} A_j$$

converge para S.

Notação:

Na sitiuação anterior, muitas vezes escrevemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S$$

significando que

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \text{ converge para } S,$$

ou seja, que $S_n \to S$ quando $n \to \infty$.

Exemplo 2 Sejam $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} \\ \frac{1}{4^n} & \frac{1}{5^n} \end{pmatrix}$, $n = 1, 2, \ldots$, e seja $S = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

A série

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j = \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^j} & \frac{1}{3^j} \\ \frac{1}{4^j} & \frac{1}{5^j} \end{pmatrix}$$

converge para $S = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ quando $n \to \infty$.

De fato,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n} A_j = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^j} & \frac{1}{3^j} \\ \frac{1}{4^j} & \frac{1}{5^j} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} & \frac{1}{3^2} \\ \frac{1}{4^2} & \frac{1}{5^2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3^n} \\ \frac{1}{4^n} & \frac{1}{5^n} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} & 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} \end{pmatrix} \to S = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$.

Definição 2 *Uma série da forma*

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j A^j,$$

onde $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$ *e* $b_n \in \mathbf{R}, n = 0, 1, 2, \ldots,$ *é dita uma série de potências de* A*.*

Exemplo 3 Seja $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ e considere a série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Essa série converge para $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

De fato:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=0}^{n} A^j = A^0 + A^1 + A^2 + \cdots + A^n = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^0 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^1 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2 + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \\
S_n &\to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ quando } n \to \infty
\end{aligned}$$

2 Exponencial de Matriz

Fato 1 *Seja* $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$.

Pode-se mostrar que a série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$$

é convergente para uma matriz $\in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$.

Definição 3 *Seja* $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$. *Definimos*

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j.$$

Exemplo 4 Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Então $e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$.

Exercício 1 Justifique a afirmação do exemplo anterior.

Exercício 2 Calcule e^A onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 3 Calcule e^A onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 4 Calcule e^{tA} onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 5 Calcule e^{tA} onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 6 Calcule e^{tA} onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Fato 2 *Seja* $A = \beta I = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbf{R})$.

Então $e^A = e^\beta I = \begin{pmatrix} e^\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^\beta \end{pmatrix}$.

Exercício 7 Prove o fato anterior.

Fato 3 *Sejam* $A_1 \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbf{R})$ *e* $A_2 \in \mathcal{M}_{\ell \times \ell}(\mathbf{R})$ *e considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(k+\ell)\times(k+\ell)}(\mathbf{R}).$$

Então

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & O \\ O & e^{A_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(k+\ell)\times(k+\ell)}(\mathbf{R}).$$

Exercício 8 Prove o fato anterior.

Exercício 9 Calcule e^{tA} onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Sugestão: note que $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ onde A_1 e A_2 são matrizes quadradas.

Fato 4 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$.

Então

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-4}}{(k-4)!} & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \frac{t^{k-5}}{(k-5)!} & \frac{t^{k-4}}{(k-4)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R}).$$

Exercício 10 Prove o fato anterior.

Proposição 1 *Sejam* $A, B \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$.
Se $AB = BA$ *então* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Exercício 11 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbf{R})$ dadas por

$$A = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calcule $e^{t(A+B)}$ (e justifique)