

E8 L1 Aplicações do plano no plano max bijetora.

Por exemplo: F que fixe uma reta r e sendo S_1 e S_2 os semiplanos delimitados por r , temos $F(P) = \begin{cases} P', & \text{simétrico de } P \text{ em relação a } r \\ & \text{se } P \in S_1 \\ P, & \text{se } P \in S_2 \\ P, & \text{se } P \in r. \end{cases}$

F max é injetora
max é sobrejetora.

E10 L1 Todas as letras da frase max simétricas em relação ao eixo vertical

V
↓
V
A
A
M
A
M
A

E11 L1 F, G transformações do plano. Prove que

a) $G \circ F$ é transformação.

De fato,

i) Se $P_1 \neq P_2$, então $F(P_1) \neq F(P_2)$, pois F é injetora.
Também $G(F(P_1)) \neq G(F(P_2))$, pois G é injetora.
Logo $P_1 \neq P_2 \Rightarrow (G \circ F)(P_1) \neq (G \circ F)(P_2)$.
 $\therefore (G \circ F)$ é injetora.

ii) Dado ponto R , $\exists Q$ tal que $G(Q) = R$ pois G é sobrejetora e $\exists P$ tal que $F(P) = Q$ pois F é sobrejetora.
Logo, dado R , $\exists P$ tal que $G(F(P)) = G(Q) = R$. $\therefore (G \circ F)$ é sobre.

De i e ii: $G \circ F$ é bijetora e $\therefore$ é transformação do plano.

b) $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Pelo item a, $G \circ F$ tem inversa: $(G \circ F)^{-1}$ com a propriedade

$$\begin{cases} (G \circ F)^{-1} \circ (G \circ F)(P) = P, \forall P \text{ do plano.} \\ (G \circ F) \circ (G \circ F)^{-1}(P) = P. \end{cases}$$

Agora:

$$F^{-1} \circ G^{-1} \circ (G \circ F)(P) = F^{-1} \left(\underbrace{G^{-1}(G(F(P)))}_{F(P)} \right) = F^{-1}(F(P)) = P$$

$$\stackrel{e}{=} (G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1})(P) = G(F(F^{-1}(G^{-1}(P)))) = G(G^{-1}(P)) = P.$$

Portanto $(G \circ F)^{-1}$ e $F^{-1} \circ G^{-1}$ são transformações que coincidem em todos os pontos e segue que $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$. #

E12 | L1 | F, G, H transformações. Prove:

a) $G \circ F = H \circ F \Rightarrow G = H$.

• Seja Q um pt qq do plano e seja P tal que

$$F(P) = Q$$

Por hipótese $G(F(P)) = H(F(P))$ ou

$$\text{seja } G(Q) = H(Q) \quad \forall \text{ pt } Q$$

$$\Rightarrow G = H.$$

b) $G \circ F = F \Rightarrow G = Id$

$$\text{Temos } (Id \circ F)(P) = Id(F(P)) = F(P) \quad \forall P.$$

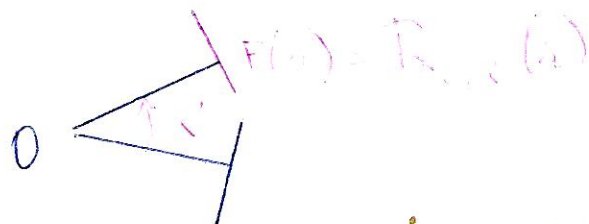
$$\text{Logo } F = Id \circ F.$$

Por hipótese $G \circ F = F = Id \circ F$ e segue pelo item (a): $G = Id$.

E13 | L1

r

$Tr(r)$



E14 | L1

Não. r e $R_{0,\alpha}(r)$ não são paralelas, $\alpha \neq \pi$.