P1 - Matemática II - CCM - Abril, 2023

Q1: Considere a equação linear de segunda ordem

$$(*) \quad y'' = -y - 2cy'$$

onde $c \geq 0$ é um número real.

(a) Resolva $(*)$ mostrando que a equação é equivalente a um sistema linear 2×2

$$(**) \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = A \cdot \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

e resolvendo o sistema. Estude 4 casos:

(i) $c = 0$, (ii) $c \in (0,1)$, (iii) $c = 1$ e (iv) $c > 1$.

(b) Faça esboços (desenhos) dos campos de vetores e das soluções no espaço de fase ("retratos de fase", como são chamados) nos 4 casos.

(c) Seja

$$E(y,z) = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

(i) Mostre que, para $c = 0$ em (**), E é constante ao longo das soluções.

(ii) Para $c > 0$ em (**), mostre que E é decrescente ao longo das soluções.

(iii) Interprete (i) e (ii) geometricamente e compare com os espaços de fase do item (b).

Q2: Uma matriz A é <u>diagonalizável</u> se existem uma matriz inversível S e uma matriz diagonal Λ tais que

$$A = S \Lambda S^{-1}.$$

(a) Mostre que, se o polinômio característico $p_A(\lambda)$ de A tem duas raízes distintas, então A é diagonalizável.

<u>Sugestão</u>: Mostre que autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. O que isso quer dizer quando os colocamos nas colunas de uma matriz?

(b) Diagonalize as matrizes

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4-3i & -6+6i \\ 2-2i & -3+4i \end{bmatrix}$

(c) Calcule N^2 para cada uma das matrizes a seguir:

(i) $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (iii) $N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, $bc = -a^2$.

(d) Uma matriz N 2×2 cujo quadrado é 0 é chamada nilpotente. Mostre que se N é 2×2 nilpotente, então é da forma (iii) acima. Conclua que, se N é nilpotente e $N \neq 0$, então N não é diagonal.

(e) Use o que foi feito acima para mostrar que uma matriz da forma $A = kI + N$, onde $k \in \mathbb{R}$ e N é nilpotente e $N \neq 0$, não é diagonalizável.

$\boxed{Q3}$: Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a) Mostre, fazendo as contas, que "A satisfaz seu polinômio característico", isto é, se $p_A(\lambda)$ é o polinômio característico de A, então

$$(*) \quad p_A(A) = 0,$$

onde 0 à direita em (*) é a matriz 2x2 com apenas 0's.

(b) Faça as contas e verifique isso no caso das duas matrizes do item (b) da Questão 2.

(c) Suponha que A é diagonalizável e reprove (*) usando essa hipótese.

$\boxed{Q4}$: Considere o conjunto

$$K = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\} \qquad (\mathbb{Q} = \text{números racionais})$$

com a soma usual de pares ordenados e o produto

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac + 2bd,\ ad + bc).$$

(a) Mostre que K é um corpo e que $\mathbb{Q} \ni a \longmapsto (a,0) \in K$ identifica $\mathbb{Q}$ com um subcorpo de K.

τ = Tau (letra grega)

(b) Mostre que a equação $x^2 - 2 = 0$ tem duas soluções em K. Se chamamos uma dessas soluções de τ, mostre que todo elemento de K pode ser escrito na forma $a + \tau b$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$.

<u>Pergunta extra</u>: Discuta o que fazer, em analogia ao que é feito acima, para encontrar um corpo onde o polinômio $x^3 - 1$ tem 3 raízes distintas.