MAT1351 - Cálculo para Funções de Uma Variável Real I

PRIMEIRA LISTA PARA ENTREGAR

Instruções

1. Esta lista representará 10% do valor total das listas.
2. Fazer em grupos de até 4 pessoas.
3. Prazo de entrega é até 14 de abril.
4. Escrever seus nomes completos com seu número usp nos trabalhos.
5. Enviar os trabalhos por e-Disciplinas em arquivos pdf.
6. Justifique todas as suas afirmações. Bom trabalho!

Questão 1 (2.0 pts) Fatorar e simplificar a seguinte expressão

$$\frac{4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 3x}.$$

Questão 2 (3.0 pts) Sejam $a > 0$ e $b > 0$, verifique as seguintes identidades

(a) $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

(b) $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})$

(c) $a - b = (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2 b} + \sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{b^3})$

Questão 3 (5.0 pts) Calcule os seguintes limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 + 17x + 4}{5x^2 - 3x + 10}.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3}{3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 3x}.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^2 + 3x - 6}.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{2}{3x - 6} - \frac{2}{2x^2 - 5x + 2}\right).$

Solução:

Q1. Escrevemos $P(x) = 4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ e

$$Q(x) = 3x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 3x.$$

Fatoramos $P(x)$ usando a regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 4 & 9 & 3 & -5 & -3 \\
-1 & \downarrow & -4 & -5 & 2 & 3 \\
\hline
 & 4 & 5 & -2 & -3 & 0 \\
-1 & \downarrow & -4 & -1 & 3 & \\
\hline
 & 4 & 1 & -3 & 0 & \\
-1 & \downarrow & -4 & 3 & & \\
\hline
 & 4 & -3 & 0 & &
\end{array}$$

Assim $P(x) = 4x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = (4x-3)(x+1)^3$, e

$$Q(x) = 3x(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 3x(x+1)^3.$$

Portanto: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{4x-3}{3x}$

Q2. (a) $a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$

(b) $a - b = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}).$

$$= (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\left((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2\right)$$

$$= (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)$$

(c) $a - b = (\sqrt[4]{a})^4 - (\sqrt[4]{b})^4$

$$= (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})\left(\sqrt[4]{a}^3 + \sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{b}^2 + \sqrt[4]{a}^2.\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{b}^3\right)$$

$$= (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})\left(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{b^3}\right).$$

Q3.

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+17x+4}{5x^2-3x+10}$; como $5x^2-3x+10>0, \forall x\in\mathbb{R}$

temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+17x+4}{5x^2-3x+10} = \frac{3(2^2)+17(2)+4}{5(2^2)-3(2)+10} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}.$$

(b) Da questão 1 temos

$$\lim_{x\to -1} \frac{4x^4+9x^3+3x^2-5x-3}{3x^4+9x^3+9x^2+3x} = \lim_{x\to -1} \frac{4x-3}{3x} = \frac{4(-1)-3}{3(-1)} = \frac{7}{3}.$$

(c) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2+3x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x-2)(x+2)}{3(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)^2}{3(x-1)} = -\frac{16}{9}.$$

(d) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{1}{2}.$$

(e). $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{3x-6} - \frac{2}{2x^2-5x+2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{4(x^2-4x+4)}{3(x-2)(2x^2-5x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)^2}{3(x-2)(x-2)(2x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{4}{3(2x-1)} = \frac{4}{9}.$$