MATEMÁTICA IV - 1º Semestre de 2023

Complemento: Espaço Tangente

Definição 1 *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n$, e $\overline{x} \in \mathcal{S}$. Dizemos que um vetor $w \in \mathbf{R}^n$ é um vetor tangente a $\mathcal{S}$ no ponto $\overline{x}$ se existe uma curva parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 satisfazendo:*

(i) $\gamma(t) \in \mathcal{S}, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ [isto é, a imagem de γ está em $\mathcal{S}$, ou ainda, γ é uma curva em $\mathcal{S}$].

(ii) $\gamma(0) = \overline{x}$ [isto é, a curva parametrizada γ passa pelo ponto $\overline{x}$ de $\mathcal{S}$ no instante $t = 0$].

(iii) $\dot{\gamma}(0) = w$ [isto é, a curva parametrizada γ tem velocidade w no instante $t = 0$].

Chama-se conjunto tangente a $\mathcal{S}$ no ponto $\overline{x}$, e denota-se por $T_{\overline{x}}\mathcal{S}$, ao subconjunto de $\mathbf{R}^n$ formado por todos os vetores $w \in \mathbf{R}^n$ que são vetores tangentes a $\mathcal{S}$ no ponto $\overline{x}$.

Proposição 1 *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^{k+1}$.*

Quando $\mathcal{S}$ é gráfico de uma função $f : U = U^o \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ de classe C^1, resulta que $T_{(\overline{x}, f(\overline{x}))}\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de dimensão k, para todo $\overline{x} \in U$. Nesse caso, $\mathcal{S}$ é uma superfície regular de dimensão k em $\mathbf{R}^{k+1}$ [isto é, uma hipersuperfície regular de $\mathbf{R}^{k+1}$], de classe C^1.

Mais:

$T_{(\overline{x}, f(\overline{x}))}\mathcal{S} =$ Gráfico de $Df(\overline{x})$, para cada $\overline{x} \in U$.

Proposição 2 *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n$.*

Quando $\mathcal{S}$ é imagem de uma função $\Phi : U = U^o \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1, injetora, e tal que $D\Phi(u) : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ é injetora, para todo $u \in U$, resulta que o conjunto tangente $T_{\Phi(\overline{u})}\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de dimensão k de $\mathbf{R}^n$, para todo $\overline{u} \in U$. Nesse caso, $\mathcal{S}$ é uma superfície regular de dimensão k em $\mathbf{R}^n$, de classe C^1.

Mais:

$T_{\Phi(\overline{u})}\mathcal{S} =$ Imagem de $D\Phi(\overline{x})$, para cada $\overline{u} \in U$.

(Chamamos uma tal $\mathcal{S}$ de superfície parametrizada e Φ de parametrização regular (ou mesmo, dizemos que Φ é uma superfície parametrizada).

Proposição 3 *Seja $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n$.*

Quando $\mathcal{S} \neq \emptyset$ é o "conjunto de nível zero" de uma função $f : \Omega = \Omega^o \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ de classe C^1, tal que $Df(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ é sobrejetora, para todo $x \in \Omega$, resulta que o conjunto tangente $T_{\overline{x}}\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de dimensão $n-k$ de $\mathbf{R}^n$, para todo $\overline{x} \in \mathcal{S}$. Nesse caso, $\mathcal{S}$ é uma superfície regular de dimensão $n-k$ em $\mathbf{R}^n$, de classe C^1.

Mais:

$T_{\overline{x}}\mathcal{S} =$ Kernel de $Df(\overline{x})$, para cada $\overline{x} \in \mathcal{S}$.

Observação 1 Nos três casos mencionados nas proposições, em que $\mathcal{S}$ é superfície regular, o conjunto tangente a $\mathcal{S}$ num ponto $p \in \mathcal{S}$, (isto é, o conjunto $T_p\mathcal{S}$), que resulta um subespaço vetorial, é chamado **espaço tangente** a $\mathcal{S}$ no ponto p.

O subespaço afim correspondente $p + T_p\mathcal{S}$ (que tem o ponto p em comum com $\mathcal{S}$) é chamado **espaço tangente afim** a $\mathcal{S}$ no ponto p.