ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À SEXTA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang.

Exercício 1. (Seção 3.3, Problema 4). Seja $E = \|Ax - b\|^2$ e escreva as equações $\frac{\partial E}{\partial u} = 0$ e $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Compare as equações obtidas com $A^T A\hat{x} = A^T b$, confirmando que tanto cálculo como geometria levam às mesmas equações normais. Ache a solução $\hat{x}$ e a projeção $p = A\hat{x}$. Por que $p = b$?

Exercício 2. (Seção 3.3, Problema 6) Ache a projeção de b sobre o espaço coluna de A, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Escreva b como $b = p + q$ em que p pertence a $C(A)$ e $q \in C(A)^\perp$. Quais dos quatro subespaços fundamentais contém q?

Exercício 3. (Seção 3.3, Problema 7) Ache a matriz de projeção P no espaço gerado por $a_1 = (1, 0, 1)$ e $a_2 = (1, 1 - 1)$.

Exercício 4. (Seção 3.3, Problema 13) Ache a melhor reta (no sentido de MMQ) $b(t) = \alpha + \beta t$ que passa pelos pontos abaixo:

t	-2	-1	0	2
b	4	3	1	0

Depois ache a projeção de $b = (4, 3, 1, 0)$ no espaço coluna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5. (Seção 3.3, Problema 18) Gostaríamos de fitar um plano $y = C + Dt + Ez$ usando quatro pontos (y, t, z) dados por $(3, 1, 1)$, $(6, 0, 3)$, $(5, 2, 1)$ e $(0, 0, 0)$.

(a) Ache quatro equações com três incógnitas para passar um plano através dos pontos (se é que existe o plano).

(b) Ache 3 equações com 3 incógnitas para determinar a melhor solução via MMQ.

Exercício 6. (Seção 3.3, Problema 19) Se $P_C = A(A^T A)^{-1} A^T$ é a projeção ortogonal no espaço coluna de A, quem é a projeção P_R no espaço linha? (Não é P_C^T!)

Exercício 7. (Seção 3.3, Problema 27) Este problema projeta $b = (b_1, ..., b_m)$ sobre a linha que passa por $a = (1, ..., 1)$. Para tanto, resolvemos m equações $ax = b$ em uma variável por MMQ.

(a) Resolva $a^T a\hat{x} = a^T b$ para mostrar que a solução é igual a média de b's.

(b) Ache $e = b - a\hat{x}$, a variância $\|e\|^2$ e o desvio padrão $\|e\|$.

(c) A linha horizontal $\hat{b} = 3$ é a mais próxima a $b = (1, 2, 6)$. Cheque que $p = (3, 3, 3)$ é perpendicular a e e ache a matriz de projeção P.

Exercício 8. (Seção 3.4, Problema 1) (a) Escreva as quatro equações para fitar $y(t) = C + Dt$ com os dados

t	-2	-1	1	2
y	-4	-3	-1	0

Para tanto monte o sistema $A\lambda = b$ e mostre que as colunas são ortogonais.

(b) Ache a melhor reta possível, desenhe seu gráfico e calcule $E^2 = \sum_{j=1}^{4}(y_i - C - Dt_i)^2$.

(c) Interprete o erro zero em termos do sistema original de quatro equações em duas variáveis: O lado direito $(-4, -3, -1, 0)$ está no subespaço ______.

Exercício 9. (Seção 3.4, Problema 4) Sejam Q_1 e Q_2 matrizes ortogonais. Mostre que Q_1Q_2 também é ortogonal. Se Q_1 é uma rotação em $\mathbb{R}^2$ por θ e Q_2 é uma rotação por ψ, quem é Q_1Q_2? Ache as identidades trigonométricas para $\mathrm{sen}(\theta + \psi)$ e $\cos(\theta + \psi)$ usando Q_1Q_2.

Exercício 10. (Seção 3.4, Problema 11) Mostre que uma matriz ortogonal que é triangular superior deve ser necessariamente uma matrix diagonal.

Exercício 11. (Seção de exercícios de revisão, Problema 18) Se os vetores ortonormais $q_1 = (2/3, 2/3, -1/3)$ e $q_2 = (-1/3, 2/3, 2/3)$ são as colunas de Q, quem são as matrizes Q^TQ e QQ^T? Mostre que QQ^T é uma matriz de projeção ortogonal (no plano gerado por q_1 e q_2).