

Álgebra Linear e Aplicações

- *Método dos mínimos quadrados (caso geral e exemplos), matrizes com colunas ortonormais.*



MÍNIMOS QUADRADOS (CASO GERAL)

EM GERAL, SUPONHA QUE TENHAMOS OS SEGUINTE DADOS EXPERIMENTAIS

x	x_1	$\dots$	x_m
y	y_1	$\dots$	y_m

DADOS

FUNÇÕES $g_1, \dots, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, GOSTARÍAMOS DE ACHAR $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ TAIS QUE $y(x) = \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$.

ASSIM, GOSTARÍAMOS DE RESOLVER

$$\begin{cases} \alpha_1 g_1(x_1) + \dots + \alpha_n g_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 g_1(x_m) + \dots + \alpha_n g_n(x_m) = y_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(x_m) & \dots & g_n(x_m) \end{bmatrix}}_{=: A \in M_{m,n}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\lambda \in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{b \in \mathbb{R}^m}$$

EM GERAL, $A\lambda = b$ NÃO TEM SOLUÇÃO PARA $m > n$ (PODE TER, MAS É DIFÍCIL OCORRER NA PRÁTICA).

ASSIM, PROCURAMOS λ QUE MINIMIZA $\|b - A\lambda\|^2$. ESTE λ É TAL QUE $A\lambda$ É PROJEÇÃO DE b EM $C(A)$. LOGO λ SATISFAZ

$$\|b - \alpha_1 C_{A1} - \alpha_2 C_{A2} - \dots - \alpha_n C_{An}\|^2 = \sum_{j=1}^m \left(y_j - \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k(x_j) \right)^2$$

$\hookrightarrow$ COLUMNA j DE A

$A^T A \lambda = A^T b$

 EQUAÇÃO NORMAL.

A FUNÇÃO PROCURADA É DADA POR $y(x) = \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$ COM $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

OS VALORES QUE APROXIMAM $b = (y_1, \dots, y_m)$ SÃO DADOS POR $A\lambda = A(A^T A)^{-1} A^T b$.

EXEMPLO 1: MEDIMOS A ALTURA EM RELAÇÃO AO TEMPO DE UM CORPO CAINDO EM QUEDA LIVRE SEM RESISTÊNCIA DO AR. QUAIS SÃO A POSIÇÃO INICIAL, VELOCIDADE INICIAL E ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL?

SOLUÇÃO: TEMOS

TEMPO	t_1	$\dots$	t_n
ALTURA	x_1	$\dots$	x_n

QUEREMOS AJUSTAR $x = x_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$. ASSIM, DEVEMOS "RESOLVER"

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + v_0 t_1 + \frac{g}{2} t_1^2 \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + v_0 t_n + \frac{g}{2} t_n^2 \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ \frac{g}{2} \end{bmatrix}}_\lambda = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_b$$

EM GERAL, O PROBLEMA NÃO TEM SOLUÇÃO. ASSIM, PROCURAMOS MINIMIZAR

$$E^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0 - v_0 t_i - \frac{g}{2} t_i^2)^2 = \|A\lambda - b\|^2$$

PORTANTO, DEVEMOS RESOLVER $A^T A \lambda = A^T b$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \\ t_1^2 & \dots & t_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ \frac{g}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & t_n \\ t_1^2 & \dots & t_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

CONCLUSÃO:

BASTA RESOLVER

$$\begin{bmatrix} n & \sum t_i & \sum t_i^2 \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ \frac{g}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum t_i x_i \\ \sum t_i^2 x_i \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2: MEDIMOS PARTÍCULAS RADIOATIVAS DE 2 FONTES EM RELAÇÃO AO TEMPO.

QUANTO DE MATERIAL RADIOATIVO DE CADA UM DOS ELEMENTOS TÍNHAMOS EM $t=0$?

SOLUÇÃO: TEMOS

TEMPO	t_1	t_2	$\dots$	t_n
PARTÍCULAS DETECTADAS	x_1	x_2	$\dots$	x_n

QUEREMOS AJUSTAR $x(t) = M e^{at} + N e^{bt}$

VAMOS SUPOR QUE CONHECEMOS α E β (ESTÃO ASSOCIADOS À MEIA VIDA DAS PARTÍCULAS). ASSIM, DEVEMOS "RESOLVER"

$$\begin{aligned} x_1 &= M e^{\alpha t_1} + N e^{\beta t_1} \\ &\vdots \\ x_n &= M e^{\alpha t_n} + N e^{\beta t_n} \end{aligned} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\alpha t_1} & e^{\beta t_1} \\ \vdots & \vdots \\ e^{\alpha t_n} & e^{\beta t_n} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_b$$

NOVAMENTE VAMOS MINIMIZAR $E^2 = \sum_{i=1}^n (M e^{\alpha t_i} + N e^{\beta t_i} - x_i)^2 = \|b - A\lambda\|^2$.

DEVEMOS RESOLVER $A^T A \lambda = A^T b$

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha t_1} & \dots & e^{\alpha t_n} \\ e^{\beta t_1} & \dots & e^{\beta t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha t_1} & e^{\beta t_1} \\ \vdots & \vdots \\ e^{\alpha t_n} & e^{\beta t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t_1} & \dots & e^{\alpha t_n} \\ e^{\beta t_1} & \dots & e^{\beta t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

OU SEJA, $\begin{bmatrix} \sum e^{2\alpha t_i} & \sum e^{(\alpha+\beta)t_i} \\ \sum e^{(\alpha+\beta)t_i} & \sum e^{2\beta t_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i e^{\alpha t_i} \\ \sum x_i e^{\beta t_i} \end{bmatrix}$

O QUE ACONTECERIA SE $A = [v_1 \dots v_n]$ TIVESSE COLUNAS ORTONORMAIS?

NESTE CASO, $A^T A = \begin{bmatrix} -v_1^T- \\ \vdots \\ -v_n^T- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & \dots & v_1^T v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^T v_1 & \dots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = I$

$\hookrightarrow v_i^T v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

LOGO $A^T A \lambda = A^T b \Leftrightarrow \lambda = A^T b$. MUITO MAIS FÁCIL!

ISTO MOTIVA O ESTUDO A SEGUIR.

MATRIZES COM COLUNAS ORTONORMAIS

PARA COMEÇAR NOSSO ESTUDO, CONSIDEREMOS $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ DADA POR

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

PROPOSIÇÃO: AS SEGUINTE PROPRIEDADES SÃO EQUIVALENTES:

1. Os VETORES $\{v_1, \dots, v_n\}$ SÃO ORTONORMAIS, OU SEJA, $v_i^T v_j = \delta_{ij}$
2. $Q^T Q = I$
3. $\|Qx\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

DEMO: $1. \Rightarrow 2.$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} -v_1^T & \vdots & -v_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & \dots & v_1^T v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^T v_1 & \dots & v_n^T v_n \end{bmatrix} = I$$

$$2. \Rightarrow 3.$$

$$\|Qx\|^2 = (Qx)^T Qx = x^T Q^T Qx = x^T Ix = x^T x = \|x\|^2$$

3. $\Rightarrow$ 4

$$\langle Qx, Qy \rangle = \frac{1}{4} \left(\langle Q(x+y), Q(x+y) \rangle - \langle Q(x-y), Q(x-y) \rangle \right) = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\langle x+y, x+y \rangle}_{\substack{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle}} - \underbrace{\langle x-y, x-y \rangle}_{\substack{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle}} \right) = \langle x, y \rangle$$

4. $\Rightarrow$ 1.

$$\langle u, v \rangle = \langle Qe_i, Qe_j \rangle = (Qe_i)^T Qe_j = e_i^T Q^T Q e_j = e_i^T e_j = \delta_{ij}$$

OBS: $S_E \{v_1, \dots, v_n\}$ SÃO ORTONORMAIS, ENTÃO É L.I. LOGO $N(A) = \{0\}$ E $m \geq n$.

$$\underline{D_{EMO}}: \quad \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow v_i^T (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0.$$

QUANDO $m=n$ E Q TEM COLUNAS ORTONORMAIS, Q É CHAMADO DE MATRIZ ORTOGONAL. NESTE CASO, $Q^T Q = I \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}$.

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE $Q \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ É ORTOGONAL SE $Q^{-1} = Q^T$ (EQUIVALE A TER COLUNAS ORTONORMAIS)

EXEMPLO: SEJA $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Logo $Q^T Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

MAS $Q Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \neq I$

EXEMPLO: ROTAÇÃO $Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$ É ORTOGONAL

PERMUTAÇÕES $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ É ORTOGONAL

OBSERVE QUE AS COLUNAS DE UMA MATRIZ ORTOGONAL SÃO L.I.'S E, PORTANTO, FORMAM UMA BASE ORTONORMAL.

DEFINIÇÃO: UMA BASE ORTONORMAL $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ DE UM SUBESPAÇO $W \subset \mathbb{R}^n$ É UMA BASE DE W TAL QUE $v_i^T v_j = \delta_{ij}$.

OBS: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ É BASE ORTONORMAL DE $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow Q = [v_1 \dots v_n]$ É ORTOGONAL.
AQUI, $v_j \in \mathbb{R}^n$.

VANTAGENS DAS BASES ORTONORMAIS:

SEJA $W \subset \mathbb{R}^m$ UM SUBESPAÇO E $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ UMA BASE ORTONORMAL DE W .

1. SE $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, ENTÃO $\alpha_i = v_i^T v$.

DEMO: $v_i^T v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_i^T v_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i$ ■

2. SE $v \in W$, ENTÃO $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n (v_j^T v)^2$.

DEMO: $\|v\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n v_i^T v v_i, \sum_{j=1}^n v_j^T v v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v_i^T v)(v_j^T v) v_i^T v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v_i^T v)(v_j^T v) \delta_{ij}$
 $= \sum_{i=1}^n (v_i^T v)^2$ ■

3. SE $v \in \mathbb{R}^m$, A PROJEÇÃO ORTOGONAL DE v EM W É $(v_1^T v)v_1 + \dots + (v_n^T v)v_n$.

DEMO: DEFINIMOS $Q \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ POR $Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. LOGO $W = C(Q)$.

VEMOS QUE A PROJEÇÃO DE $v \in \mathbb{R}^m$ EM W É DADA POR $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, EM QUE α SATISFAZ $Q^T Q \alpha = Q^T v \Rightarrow \alpha = Q^T v$.

A PROJEÇÃO É $Q(Q^T Q)^{-1} Q^T v = Q Q^T v = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & v_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, v \rangle \end{bmatrix}$
 $= \langle v_1, v \rangle v_1 + \dots + \langle v_n, v \rangle v_n$
 $= (v_1^T v)v_1 + \dots + (v_n^T v)v_n$ ■