

Variáveis Aleatórias Discretas

Ciências Contábeis - FEA - Noturno

1º Semestre 2023

Profs. Leonardo T. Rolla e Nikolai Kolev

(baseado em material previamente
desenvolvido pelo Prof. Gilberto Alvarenga Paula)

- 1 Variável Aleatória Discreta
- 2 Função de Probabilidade e Função de Distribuição
- 3 Esperança e Variância

1 Variável Aleatória Discreta

2 Função de Probabilidade e Função de Distribuição

3 Esperança e Variância

Definição

Uma **variável aleatória** é uma característica numérica resultante de um experimento aleatório.

Definição

Uma variável aleatória é definida como sendo **discreta** quando o número de valores possíveis que a variável assume for **finito** ou **infinito enumerável** ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, etc.).

Exemplos

- nº de chamadas na central do Corpo de Bombeiros no período da manhã
- nº de alunos aprovados numa disciplina com 80 alunos matriculados
- nº de acessos a um determinado site, das 0h às 6h
- nº de inadimplentes dentre 500 pessoas que pegaram empréstimo num banco no último ano
- nº de consultas ao médico num determinado ano
- nº de domicílios com crianças menores de 6 anos
- variação no nº de acidentes de um ano para o outro ano numa determinada rodovia
- Nota obtida na prova quando corrige-se com apenas uma casa decimal

Experimento Aleatório

Observa-se a face superior no lançamento de duas moedas. Nesse caso o espaço amostral pode ser definido na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

em que $\omega_1 = \{\text{cara, cara}\}$, $\omega_2 = \{\text{cara, coroa}\}$, $\omega_3 = \{\text{coroa, cara}\}$ e $\omega_4 = \{\text{coroa, coroa}\}$.

Variável Aleatória

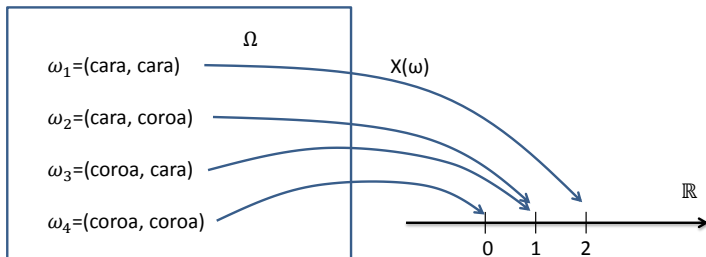
Se definimos a variável aleatória $X = \text{número de caras no lançamento de duas moedas}$, então obtemos

$$X(\omega_1) = 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 1 \text{ e } X(\omega_4) = 0.$$

Ou seja, a variável aleatória X assume os valores $X = 0, 1, 2$.

Exemplo

Descrição da variável aleatória X : número de caras no lançamento de duas moedas



1 Variável Aleatória Discreta

2 Função de Probabilidade e Função de Distribuição

3 Esperança e Variância

Função de probabilidade

A **função de probabilidade de X** é dada por

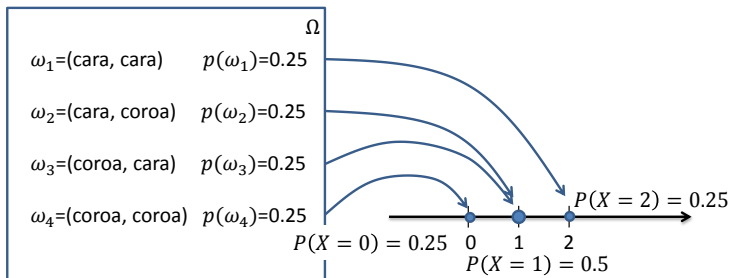
$$p(x) = P(X = x)$$

e pode ser representada pela tabela abaixo

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_k)$

- $p(x_i) \geq 0$
- $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_k) = 1$

Descrição do cálculo da probabilidade da variável aleatória
 X : número de caras no lançamento de duas moedas



Função de probabilidade

Portanto, a função de probabilidade da variável aleatória $X = \text{número de caras no lançamento de duas moedas}$ fica dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

Função de distribuição

Uma maneira de descrever a distribuição de uma variável aleatória é através da função de distribuição acumulada, definida por

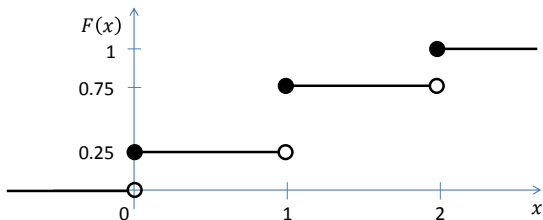
$$F(x) = P(X \leq x),$$

em que x é um número real e $F(x)$ pertence ao intervalo $[0, 1]$.

Exemplo

Descrição da função de distribuição acumulada $F(x) = P(X \leq x)$ da variável aleatória X : número de caras no lançamento de duas moedas

x	0	1	2
$P(X=x)$	0,25	0,50	0,25



Duas moedas

Portanto, a função de distribuição acumulada da variável aleatória $X = \text{número de caras no lançamento de duas moedas}$ fica dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0,25 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0,75 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- 1 Variável Aleatória Discreta
- 2 Função de Probabilidade e Função de Distribuição
- 3 Esperança e Variância

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \dots, x_k$. Chamamos de **valor médio**, ou **valor esperado**, ou **esperança** de X o valor

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1p(x_1) + x_2p(x_2) + \cdots + x_kp(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i p(x_i), \end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\mu = E(X)$.

Cálculo Esperança

A função de probabilidade da variável aleatória $X = \text{número de caras no lançamento de duas moedas}$ é dada por

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,50	0,25

A esperança de X fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,25 + 1 \times 0,50 + 2 \times 0,25 \\ &= 1,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, 1 cara.

Cálculo Esperança

A função de probabilidade da variável aleatória $X = \text{soma das faces superiores}$ é dada por

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

A esperança de X fica então dada por

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36} = 7,0. \end{aligned}$$

Espera-se, portanto, soma 7.

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $x_1, x_2, \dots, x_k$. Chamamos de **variância** de X o valor esperado da variável $(X - \mu)^2$, ou seja

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (x_1 - \mu)^2 p(x_1) + \dots + (x_k - \mu)^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 p(x_i),\end{aligned}$$

em que $p(x_i) = P(X = x_i)$. Notação $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Desvio Padrão

O desvio padrão de X é definido por

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Fórmula Alternativa

A variância de X pode, alternativamente, ser expressa na forma

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$

em que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= x_1^2 p(x_1) + \cdots + x_k^2 p(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k x_i^2 p(x_i). \end{aligned}$$

Cálculo Variância

Para a variável $X = \text{número de caras no lançamento de duas moedas}$ obtemos

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,50 + 2^2 \times 0,25 \\ &= 0 + 0,50 + 1,0 = 1,50. \end{aligned}$$

Portanto, a variância de X fica dada por

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 1,50 - (1,0)^2 = 1,50 - 1,0 = 0,50.$$

E o desvio padrão

$$\sigma = \text{DP}(X) = \sqrt{0,50} \cong 0,707.$$

Propriedades

$$E(aX + bY) = a E(X) + b E(Y)$$

$$E(a) = a$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Uma empresa oferece quatro modalidades de serviço A, B, C e D cobrando 100, 200, 300 e 400 (unidades monetárias), respectivamente. Sabe-se que um cliente contrata a modalidade A com probabilidade 0,2; a modalidade B com probabilidade 0,4; a C com probabilidade 0,3 e a D com probabilidade 0,1. Defina por X a variável que representa o ganho da empresa por cliente.

- (a) Construa a distribuição de probabilidades de X .
- (b) Calcule o ganho médio da empresa por cliente.
- (c) Calcule o desvio padrão do ganho da empresa por cliente.

Se $E[X] = 1$ e $\text{Var}(X) = 5$, determine

(a) $E[2 + X^2]$

(b) $\text{Var}(4 - 3X)$

Uma florista faz estoque de uma flor de curta duração que lhe custa R\$ 3,50 a unidade e que ela vende a R\$ 10,00 no primeiro dia em que a flor está na loja. Toda flor que não for vendida nesse primeiro dia não serve mais e é jogada fora. Seja X a variável aleatória que denota o número de flores que os fregueses compram em um dia casualmente escolhido. A florista descobriu que a função de probabilidade da procura de X é dada pela seguinte tabela.

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,1	0,4	0,3	0,2

Quantas flores a florista deveria ter em estoque a fim de maximizar a média (o valor esperado) do seu lucro?

Calcule $P(X \leq 0.7 \mid X \leq 2.5)$.

Faça o gráfico da função da distribuição (acumulada) F da variável aleatória X , cuja função de probabilidade é

x	-3	2	6
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Determine a função de probabilidade de uma variável aleatória X cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 3/5 & 1 \leq x < 2 \\ 4/5 & 2 \leq x < 3 \\ 9/10 & 3 \leq x < 3,5 \\ 1 & x \geq 3,5. \end{cases}$$