Gabarito Atividade 2

Exercício 1. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal de V^3 e

$$\vec{f_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_1} - \frac{1}{2}\vec{e_2}$$
$$\vec{f_2} = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e_2}$$
$$\vec{f_3} = \vec{e_3}$$

(a) Mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3.

(b) F é uma base ortonormal de V^3? Justifique sua resposta.

(c) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1, 0, -1)_E$ na base F.

Solução:

(a) Para mostrar que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3, basta mostrar que $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ é um conjunto Linearmente Independente.

Escrevendo os vetores $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ em coordenadas, temos que

$$\vec{f_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)_E \qquad \vec{f_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)_E \qquad \vec{f_3} = (0, 0, 1)_E$$

Dessa forma,

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 1 \neq 0$$

Como o determinante acima é diferente de zero, concluímos que $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ é um conjunto L.I. e, portanto, temos que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3.

(b) Uma base é dita ortonormal se, além de ser uma base ortogonal, seus vetores são unitários.

Primeiramente, veremos a ortogonalidade dos vetores:

$$\vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot 0 = 0$$
$$\vec{f_1} \cdot \vec{f_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$\vec{f_2} \cdot \vec{f_3} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Ou seja, concluímos que $\vec{f_1}$ é ortogonal a $\vec{f_2}$, $\vec{f_1}$ é ortogonal a $\vec{f_3}$ e $\vec{f_2}$ é ortogonal a $\vec{f_3}$. Assim temos que F é uma base ortogonal. Agora, note que, como E é uma base ortonormal por hipótese, então

$$||\vec{f_1}|| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$||\vec{f_2}|| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$||\vec{f_3}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

Concluindo, assim, que $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ são vetores unitários. Portanto, temos que F é uma base ortonormal de V^3.

(c) Sabemos que a matriz mudança de base da base E para a base F é dada por

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = (a, b, c)_F$. Assim,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ c \end{pmatrix}_F$$

O qual origina o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = 1 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

Dessa forma, resolvendo o sistema linear, concluímos que $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = -1$.
Portanto, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)_F$ são as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base F, como queríamos.