Aula de Exercícios - Aula 12

Primeiro Semestre de 2023

1) Encontre o valor de $\lim_{x \to 9} \left[\frac{f(x)g(x)+1}{3f(x)-2g(x)} \right]$ sabendo que $\lim_{x \to 9} f(x) = 4$ e $\lim_{x \to 9} g(x) = 2$.

(a) $\frac{11}{8}$

(b) $\frac{9}{8}$ RESPOSTA

(c) 1

(d) $\frac{5}{8}$

(e) $\frac{3}{8}$

2) Sabendo que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{1-x^2} = 3$ e $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{\ln(x)} = -2$, é correto afirmar que:

(a) Nada se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(x-1)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$ RESPOSTA

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{1-x^2} = -4$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{f(x)}{1-x}\right)^2 = 0$

(e) Nada se pode afirmar sobre $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3) Determine o valor de a que faz o limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{5x^2 + ax + 3}{x^2 + x - 2}$ existir.

(a) -2

(b) -4

(c) -8 RESPOSTA

(d) 4

(e) Não existe tal a

4) Determine o valor de a que faz o limite $\lim_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + ax - 2)}{x - 1}$ e qual o valor deste limite?

(a) $a = 1$ e o limite vale 3 RESPOSTA

(b) $a = 1$ e o limite vale 2

(c) $a = 2$ e o limite vale 1

(d) $a = 2$ e o limite vale 2

(e) Nenhuma das outras alternativas

5) Sobre o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + x - 2)}{x}$ pode-se dizer que:

(a) O limite não existe pois $\lim_{z \to \infty} \operatorname{sen}(z)$ não existe.

(b) o limite vale 1

(c) o limite vale 0, pois a função seno é limitada. RESPOSTA

(d) o limite diverge para $+\infty$

(e) Nenhuma das outras alternativas

6) Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que

$$[g(x)]^2 \leq [f(x)]^2 \leq 7 - [h(x)]^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Quais das seguintes afirmações **NÃO** é verdadeira?

A. $\lim_{x \to -3} (x+3)g(x) = 0$

B. $\lim_{x \to 5} f(x)\sqrt{x^2 - 25} = 0$

C. $\lim_{x \to 0} x^2 h(x) = 0$

D. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ resposta

E. $\lim_{x \to 0} x[g(x) + f(x)] = 0$

7) Sobre a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|3x|}\right)$ é correto afirmar que:

A. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
B. O gráfico de f possui assíntotas verticais
C. Não é possível definir $f(0)$ de modo a obter-se uma função contínua
D. A função f é par
E. O gráfico de f possui duas assíntotas horizontais distintas
resposta

8) O valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1-\cos(x)}$ é:

A. $2/3$ resposta

B. $-\infty$

C. 0

D. $+\infty$

E. 1

Lista de indeterminações envolvendo limites

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad +\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}}$$

Solução: Lembre-se que $y = e^{\ln(y)}$.

Escrevendo $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, temos que $y = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}}$.

Portanto:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = e^1 = e.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$$

Solução: Note que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]^3\\ &= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]^3 = e^3\end{aligned}$$

Calcule $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Solução: Se $y = a^h - 1$, então $y + 1 = a^h$ e, portanto, aplicando ln, temos que $\ln(y+1) = h \ln(a)$. Note também que $h \to 0$ implica que $y \to 0$. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} &= \lim_{y \to 0} \frac{y}{(\ln(1+y))/\ln(a)} \\ &= \ln(a) \lim_{y \to 0} \frac{1}{(\ln(1+y))/y} = \ln(a) \end{aligned}$$

Indique a igualdade que **NÃO** é correta:

A. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 1$ resposta

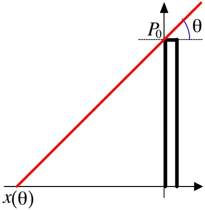
B. $\displaystyle\lim_{a\to 0} (1+2a)^{\frac{1}{a}} = e^2$

C. $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} \left(t \left(\ln\left(5+\frac{2}{t}\right) - \ln 5 \right) \right) = 2/5$

D. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1} = e^2$

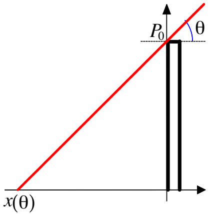
E. Com $a > 0$, $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{a^{2u}-1}{u} = 2\ln(a)$

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\text{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



C	E	a) A reta L_θ tem equação $y = \text{tg}(\theta)(x - 20)$.
C	E	b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.
C	E	c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\text{tg}(\theta)}$.
C	E	d) Se $\text{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.
C	E	e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\text{tg}(\theta) > 1/2$.

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\mathrm{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



C | ~~E~~ a) A reta L_θ tem equação $y = \mathrm{tg}(\theta)(x - 20)$.

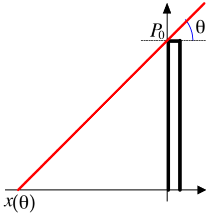
C | E b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.

C | E c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\mathrm{tg}(\theta)}$.

C | E d) Se $\mathrm{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

C | E e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\mathrm{tg}(\theta) > 1/2$.

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\mathrm{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



C | ~~E~~ a) A reta L_θ tem equação $y = \mathrm{tg}(\theta)(x - 20)$.

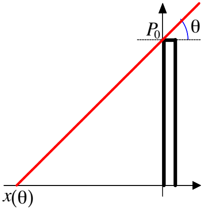
~~C~~ | E b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.

C | E c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\mathrm{tg}(\theta)}$.

C | E d) Se $\mathrm{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

C | E e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\mathrm{tg}(\theta) > 1/2$.

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\operatorname{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



C | ~~E~~ a) A reta L_θ tem equação $y = \operatorname{tg}(\theta)(x - 20)$.

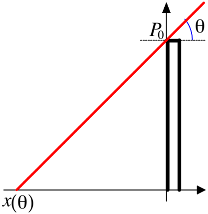
~~C~~ | E b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.

~~C~~ | E c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\operatorname{tg}(\theta)}$.

C | E d) Se $\operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

C | E e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\operatorname{tg}(\theta) > 1/2$.

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\mathrm{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



C ~~E~~ a) A reta L_θ tem equação $y = \mathrm{tg}(\theta)(x - 20)$.

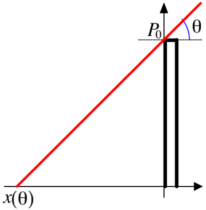
~~C~~ E b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.

~~C~~ E c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\mathrm{tg}(\theta)}$.

C ~~E~~ d) Se $\mathrm{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

C E e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\mathrm{tg}(\theta) > 1/2$.

1) No sistema de eixos mostrado na figura ao lado, suponha que $P_0 = (0, 20)$ representa a quina de um edifício de 20 m e que θ representa o ângulo que os raios solares fazem com a horizontal. Para $\theta \in (0, \pi/2)$, indique por L_θ a reta de coeficiente angular $\mathrm{tg}(\theta)$ que passa por P_0. Indique ainda por $x = x(\theta)$ o ponto em que a reta L_θ intercepta o eixo $\mathcal{O}x$.



C ~~E~~ a) A reta L_θ tem equação $y = \mathrm{tg}(\theta)(x - 20)$.

~~C~~ E b) $\left|x(\pi/4)\right| = 20$.

~~C~~ E c) O valor de $x(\theta)$ é dado por $x(\theta) = -\dfrac{20}{\mathrm{tg}(\theta)}$.

C ~~E~~ d) Se $\mathrm{tg}(\theta) = \sqrt{3}/3$, então o ponto $P = (-5\sqrt{3}, 10)$ está em uma região ensolarada.

~~C~~ E e) O ponto $Q = (-20, 10)$ está em uma região ensolarada apenas para os ângulos θ tais que $\mathrm{tg}(\theta) > 1/2$.