

séries absolutamente convergentes

Seja (x_n) uma sequência de números reais
 Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente
convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente

Exemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (harmônica alternada)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Essa série não é absolutamente convergente,
 já que $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

mas a harmônica alternada é convergente.
 É uma consequência do seguinte teorema:

Teorema (Leibniz) • (x_n) termos positivos
 • (x_n) monotona decrescente
 • $x_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n \text{ é convergente}$$

Dem.: Considere (s_n) a sequência de
 somas parciais

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 \\ \Delta_2 &= x_1 - x_2 \\ \Delta_3 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \Delta_4 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \Delta_5 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ \Delta_6 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \end{aligned}$$

$x_3 - x_4 \geq 0 \quad x_3 - x_2 \leq 0$
 $\Delta_4 \geq \Delta_2 \quad \Delta_3 \leq \Delta_1$
 $x_5 - x_4 \leq 0 \quad x_5 \leq x_4$

- 1) (Δ_{2n}) é crescente
- 2) (Δ_{2n-1}) é decrescente.

mais ainda:

$$\Delta_{2n} = \underbrace{x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2n-1}}_{\Delta_{2n-1}} - x_{2n}$$

$$\Delta_{2n} = \Delta_{2n-1} - x_{2n} < \Delta_{2n-1}$$

$\Delta_{2n} < \Delta_{2n-1}$

- (Δ_{2n}) crescente
- (Δ_{2n-1}) decrescente
- $\Delta_{2n} \leq \Delta_{2n-1}$

$$\boxed{\Delta_2 \leq \Delta_4 \leq \Delta_6 \leq \dots \leq \Delta_{2n} \leq \Delta_{2n-1} \leq \Delta_{2n-3} \leq \dots \leq \Delta_5 \leq \Delta_3 \leq \Delta_1}$$

$\therefore (\Delta_{2n})$ e (Δ_{2n-1}) são limitadas.

$$\therefore \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{2n} = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{2n-1} = b$$

Como $\boxed{\Delta_{2n} = \Delta_{2n-1} - \chi_{2n}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta_{2n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta_{2n-1}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{2n}) \\ \parallel &\quad \parallel \quad \parallel \\ a &= b - 0 \\ \Rightarrow a &= b. \end{aligned}$$

$\therefore (\Delta_n)$ é convergente.

Teorema Toda série absolutamente convergente é convergente.

Dem. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \right)$? Temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\chi_n|$ é convergente.

Vamos construir duas sequências

$$p_n = \begin{cases} \chi_n & : \chi_n \geq 0 \\ 0 & : \chi_n < 0 \end{cases} \quad q_n = \begin{cases} 0 & : \chi_n \geq 0 \\ -\chi_n & : \chi_n < 0 \end{cases}$$

note que (p_n) e (q_n) são sequências de termos positivos.

a) $p_n + q_n = |\chi_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $p_n \leq |\chi_n| \quad \text{e} \quad q_n \leq |\chi_n|$

c) $p_n - q_n = \chi_n$

b) $\Rightarrow$ (Teste da Comparação) $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são séries convergentes.

c) $\Rightarrow \chi_n = p_n - q_n \Rightarrow \sum \chi_n$ é convergente.

Obs.: j) $\sum x_n, \sum y_n$ séries convergentes.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n;$$

$$z_n = \sum_{k=1}^n x_k y_{n-k}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, sendo $\sum x_n$ e $\sum y_n$ convergentes

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq C \cdot k \cdot (-1)^n$$

$$|x_n| \leq C, |y_n| \leq k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1$$

Teste da Convergência

Teste da Raiz: Seja (x_n) uma sequência de números reais tal que $\sqrt[n]{|x_n|} < C < 1, \forall n \geq n_0$

Então $\sum x_n$ é absolutamente convergente.

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq C, \quad C < 1$$

$$|x_n| \leq C^n, \quad \forall n \geq n_0$$

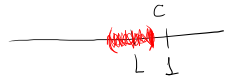
Como $\sum C^n$ é convergente ($0 < C < 1$),

segue do teste da comparação que $\sum |x_n|$ é convergente.

O teste da raiz muitas vezes é enunciado da seguinte forma:

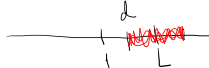
a) Se $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = L < 1$, então $\sum |x_n|$ é convergente

b) Se $\lim \sqrt[n]{|x_n|} = L > 1$, então $\sum |x_n|$ é divergente

a)  $\exists c$ tal que $L < c < 1$

Como $\sqrt[n]{|x_n|} \rightarrow L, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{|x_n|} < c, \quad \forall n \geq n_0$$

b) 

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|x_n|} > d > 1, \quad \forall n \geq n_0.$

$$|x_n| > d^n, \quad \forall n \geq n_0.$$

$d > 1 \Rightarrow \sum d^n$ é divergente $\Rightarrow$ $\sum |x_n|$ é divergente.

Teste da Razão Se $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq c < 1, \forall n \geq n_0,$

então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente.

$$|x_{n_0+1}| \leq c |x_{n_0}|$$

$$|x_{n_0+2}| \leq c \cdot |x_{n_0+1}| \leq c^2 |x_{n_0}|$$

$$|x_{n_0+3}| \leq c \cdot |x_{n_0+2}| \leq c^3 |x_{n_0}|$$

$\vdots$

$$\Rightarrow |x_{n_0+k}| \leq c^k \cdot |x_{n_0}|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_0+k}| \leq |x_{n_0}| \sum_{k=0}^{\infty} c^k$$

Pelo teste da comparação $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$ é absolutamente convergente.

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente.

O teste da razão muitas vezes é apresentado da seguinte forma:

a) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = L < 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é convergente

b) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = L > 1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é divergente.

Exemplo: $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \leq 1, \forall n.$$

no entanto $\frac{n}{n+1} \leq c < 1, \forall n \geq n_0.$

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ e } \sum \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

$$\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1 \text{ e } \sum \frac{1}{n^2} \text{ é convergente}$$