Álgebra Linear e Aplicações

- Projeções sobre subespaços de Rm, caracterização de projeções, Método dos Mínimos Quadrados.

Projeções sobre Subespaços

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado por vetores L.I. $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ dada por $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. Logo $V = C(A)$. Sabemos que $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus \underbrace{C(A)^{\perp} = C(A) \oplus N(A^T)}_{\text{são iguais}}$.

A projeção ortogonal sobre V deve satisfazer

1) $Px \in C(A) \Rightarrow Px = A\lambda$ para um certo $\lambda \in \mathbb{R}^n$.
2) $(I - P)x \in N(A^T) \Rightarrow A^T(x - A\lambda) = 0 \Rightarrow A^TA\lambda = A^Tx$.

Obs: Note que $A^TA \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ é inversível $\Leftrightarrow$ as colunas de A são L.I.'s.

Como A^TA é matriz quadrada, sabemos que A^TA é inversível $\Leftrightarrow N(A^TA) = 0$.

Isto é o mesmo que dizer que as colunas são L.I.

Porém, $x \in N(A^TA) \Leftrightarrow A^TAx = 0 \Leftrightarrow x^TA^TAx = 0 \Leftrightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$. Assim $N(A^TA) = 0 \Leftrightarrow (Ax = 0 \Rightarrow x = 0)$

Assim, $\lambda = (A^TA)^{-1}A^Tx$ e $Px = A(A^TA)^{-1}A^Tx$ é a projeção ortogonal sobre $C(A)$.

$$\boxed{Px = A(A^TA)^{-1}A^Tx} \to \text{Fórmula da projeção.}$$

Exemplo: Ache a projeção ortogonal de $(4,5,6)$ sobre $V = [(1,1,0),(2,3,0)]$.

Solução: Sabemos que $V = C(A)$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$

Note que $(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. Logo

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos que $P(4,5,6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = (4,5,0)$.

Exemplo: Se S é uma base de $\mathbb{R}^m$ e $V = [S]$, então $P = I$.

↳ se $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ é L.I. e $n = m$.

De fato, se $S=\{v_1,\dots,v_n\}$, então $V=C(A)$, em que

$A=\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. Como $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $N(A)=\{0\}$, pois as colunas são L.I., concluímos que A é inversível. Logo $P=A(A^TA)^{-1}A^T = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T = I^2 = I$.

$\hookrightarrow (A^TA)^{-1}=A^{-1}(A^T)^{-1}$ só vale quando A é inversível e quadrada.

E se V for gerado por um conjunto $S=\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathbb{R}^m$ que é L.D.?

Se $v_i=0,\ \forall i$, então $V=\{0\}$ e $P=0$. Suponha que $\exists\ v_j\neq 0$ para algum j.
Neste caso, sempre podemos achar um subconjunto $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_N\}\subset S$ que é L.I. e gera V, ou seja, $\mathcal{B}$ é base de V. (O mesmo argumento abaixo pode ser usado para provar que todo espaço vetorial finitamente gerado tem uma base)

<u>Demo:</u> Seja $\mathcal{S}=\{S'\subset S:\ S' \text{ é L.I.}\}$. Todo $S'\in\mathcal{S}$ tem entre 1 e $n-1$ elementos. Seja $N\in\{1,\dots,n-1\}$ o máximo de elementos que cada $S'\in\mathcal{S}$ pode ter. Vamos escolher $\mathcal{B}\in\mathcal{S}$ com N elementos (a escolha pode não ser única).

Se $v_j\in S$ e $\mathcal{B}\cup\{v_j\}$ é L.I., então $\mathcal{B}\cup\{v_j\}\subset\mathcal{S}$ e tem $N+1$ elementos. Absurdo! Logo $\mathcal{B}\cup\{v_j\}$ é L.D. Portanto, se $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_N\}$, então $v_j=a_{j1}u_1+\dots+a_{jN}u_N$, $a_{jk}\in\mathbb{R}$.

Assim,

Se $u\in[\mathcal{B}]$, então $u=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_Nu_N\in V$, pois $u_j\in S\in V \Rightarrow [\mathcal{B}]\subset V$.

Se $u\in V$, então $u=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\alpha_j a_{jk}u_k\in[\mathcal{B}] \Rightarrow V\subset[\mathcal{B}]$.

<u>Conclusão:</u> $\mathcal{B}$ é L.I. e $[\mathcal{B}]=V \Rightarrow \mathcal{B}$ é base de V ∎

<u>**Exemplo:**</u> Ache a projeção ortogonal de $(4,5,6)$ sobre $V=[(1,1,0),(2,3,0),(1,0,0)]$.

Neste caso, $S=\{(1,1,0),(2,3,0),(1,0,0)\}$ é L.D. Logo

$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^TA=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&1\\5&13&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ não é inversível, pois $L_3=3L_1-L_2$

Basta usar $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(2,3,0)\}$ ou $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(1,0,0)\}$ ou $\mathcal{B}=\{(2,3,0),(1,0,0)\}$.

Caracterização de Projeções

Teorema: Seja $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Logo

1) $\mathbb{R}^n = C(P) \oplus N(P)$ e P é projeção sobre $C(P) \Leftrightarrow P^2 = P$.

2) $\mathbb{R}^n = C(P) \oplus N(P)$ e P é projeção ortogonal sobre $C(P)$, isto é, $N(P) \perp C(P) \Leftrightarrow P^2 = P$ e $P = P^T$.

Demo: 1) $(\Rightarrow)$ Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $x = c + n$, $c \in C(P)$ e $n \in N(P)$, então

$$\left.\begin{array}{l} Px = P(c+n) = c \\ P^2x = Pc = P(\underset{C(P)}{c} + \underset{N(P)}{0}) = c \end{array}\right\} P^2 = P.$$

$(\Leftarrow)$ Se $P^2 = P$, então $\forall x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $x = \underbrace{Px}_{\in C(P)} + \underbrace{(I-P)x}_{\in N(P)}$, pois $P(I-P)x = Px - P^2x = Px - Px = 0$. Logo $\mathbb{R}^n = C(P) + N(P)$.

Além disso, se $x \in C(P) \cap N(P)$, então $x = Py$, pois $x \in C(P)$ e $Px = 0$, pois $x \in N(P)$. Logo $x = Py = P^2y \overset{P^2=P}{=} P(Py) = Px = 0$

Concluímos que $C(P) \cap N(P) = \{0\}$ e $\mathbb{R}^n = C(P) \oplus N(P)$.

Por fim, $P(\underset{C(P)}{c} + \underset{N(P)}{n}) = Pc + 0 = PPd = P^2d = Pd = c \Rightarrow P$ é projeção sobre $C(P)$.

se $c \in C(P)$, então $\exists d$ tal que $c = Pd$

2) Basta mostrar que se $\mathbb{R}^n = C(P) \oplus N(P)$ e P é projeção sobre $C(P)$ (logo $P^2 = P$), então $C(P) \perp N(P) \Leftrightarrow P^T = P$

$(\Rightarrow)$ Seja $x = c + n$, $y = \bar{c} + \bar{n}$, $c, \bar{c} \in C(P)$, $n, \bar{n} \in N(P)$. Logo

$$\left.\begin{array}{l} \langle Px, y \rangle = \langle c, \bar{c} + \bar{n} \rangle = \langle c, \bar{c} \rangle \\ \langle P^Tx, y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle c+n, \bar{c} \rangle = \langle c, \bar{c} \rangle \end{array}\right\} \langle (P - P^T)x, y \rangle = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, se $y = (P - P^T)x \Rightarrow \|(P-P^T)x\| = 0, \forall x \Rightarrow P = P^T$.

É sempre verdade que $\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle$

$(\Leftarrow)$ Se $c \in C(P)$ e $n \in N(P)$, então

$\langle c, n \rangle = \langle Pc, n \rangle = \langle c, P^T n \rangle = \langle c, Pn \rangle = \langle c, 0 \rangle = 0$ $\blacksquare$

Exemplo: $[A(A^TA)^{-1}A^T]^T = (A^T)^T[(A^TA)^{-1}]^T A^T = A[(A^TA)^T]^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T \Rightarrow P^T = P$

$A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1} I A^T = A(A^TA)^{-1}A^T \Rightarrow P^2 = P$.

Método dos Mínimos Quadrados

Teorema: Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um subespaço e $P: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a projeção ortogonal sobre V. Logo

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - v\| : v \in V\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Além disso, $\|x - Px\| = \|x - v\|, v \in V \Leftrightarrow Px = v$. Interpretação: Px é o elemento de V mais próximo de x.

Demo: Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Logo $x = Px + (I-P)x \in V \oplus V^\perp$. Assim, se $v \in V$, então

$$\begin{aligned}
\|x - v\|^2 &= \|x - Px + Px - v\|^2 = \langle x - Px + Px - v, x - Px + Px - v \rangle \\
&= \langle x - Px, x - Px \rangle + \langle \underbrace{x - Px}_{\in V^\perp}, \underbrace{Px - v}_{\in V} \rangle + \langle \underbrace{Px - v}_{\in V}, \underbrace{x - Px}_{\in V^\perp} \rangle + \langle Px - v, Px - v \rangle \\
&= \|x - Px\|^2 + \|Px - v\|^2
\end{aligned}$$

Logo $\|x - Px\|^2 = \|x - v\|^2 - \|Px - v\|^2 \leq \|x - v\|^2$ e $\|x - Px\|^2 = \|x - v\|^2 \Leftrightarrow \|Px - v\| = 0 \Leftrightarrow Px = v$.

Aplicação: Dado uma mola, sabemos que, pela lei de Hooke, a força que age sobre ela é dada por $F = -k(x - x_0)$, em que x_0 é a posição de repouso e k a constante elástica da mola.

Suponha que as seguintes medidas foram feitas

x	-1	1	2
$F(x)$	1	1	3

Determine k e kx_0.

Solução: Sabemos que $F(x) = kx_0 - kx = a + bx$, em que $a = kx_0$ e $b = -k$

$$\begin{aligned}
1 &= a + b(-1) \\
1 &= a + b\,1 \\
3 &= a + b\,2
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 = L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad 0b = 2$$

↳ matriz aumentada

Não tem solução!

PERGUNTA: DEFININDO O ERRO $E^2 = \sum_{i=1}^{3} \left[F(x_i) - (a + b x_i)\right]^2$, QUEM SÃO a E b QUE MINIMIZAM ESTE ERRO?

RESPOSTA: $E^2 = \| (F(x_1), F(x_2), F(x_3)) - a(1,1,1) - b(x_1, x_2, x_3) \|^2$.

ASSIM, SE $z = (F(x_1), F(x_2), F(x_3))$ E $V = [(1,1,1), (x_1, x_2, x_3)]$, O VETOR DE V QUE MINIMIZA $\|z - v\|^2$ É A PROJEÇÃO DE z EM V. LOGO $a(1,1,1) + b(x_1, x_2, x_3)$ DEVE SER A PROJEÇÃO DE z SOBRE V. COMO $V = C(A)$, COM $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, TEMOS

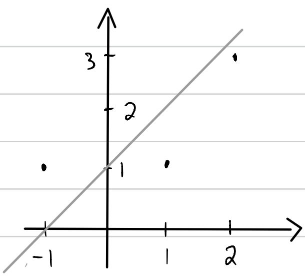
$$a(1,1,1) + b(-1,1,2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{:=\lambda} = A\lambda.$$

JÁ VIMOS QUE λ SATISFAZ $A^T A \lambda = A^T z$,

OU SEJA,
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

LOGO
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

ASSIM, A MELHOR RETA É $F(x) = a + bx = \frac{9}{7} + \frac{4}{7}x$



NO PYTHON:

```
IMPORT NUMPY AS NP
A = NP.ARRAY([[1.,-1.],[1.,1.],[1.,2.]])
B = NP.ARRAY([1.,1.,3.])
a,b = NP.LINALG.LSTSQ(A,B, RCOND=NONE)[0]
PRINT(a,b)
```

MÍNIMOS QUADRADOS = LEAST-SQUARES.