Lista 8 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

Definições: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$.

(1) p é ponto interior de A se existe $\epsilon > 0$ tal que $]p-\epsilon, p+\epsilon[\subseteq A$.
Indicamos por $int(A)$ o conjunto de todos os pontos interiores de A.

A é aberto se todos os seus pontos são interiores, isto é, $A = int(A)$

(2) A é fechado se o seu complementar $A^c = \mathbb{R} - A$ é aberto.

(3) p é ponto de fronteira de A se , para todo $\epsilon > 0$, tem-se que $]p-\epsilon, p+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$ e $]p-\epsilon, p+\epsilon[\cap A^c \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos de fronteira de A é indicado por ∂A.

(4) p é ponto aderente de A se, para todo $\epsilon > 0$, $]p-\epsilon, p+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos aderentes de A é designado por $\overline{A}$.

(5) p é ponto de acumulação de A se, para todo $\epsilon > 0$, $]p-\epsilon, p+\epsilon[\cap(A - \{p\}) \neq \emptyset$, isto é, toda vizinhança de p contém pontos de A diferentes de p.

Observe que todo ponto de acumulação de A é também um ponto aderente de A. A recíproca não é verdadeira.

O conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se conjunto derivado de A e é representado por A'.

(6) $p \in A$ é ponto isolado de A se existe $\epsilon > 0$ tal que $]p-\epsilon, p+\epsilon[\cap A = \{p\}$.

Exercício 1: Determine o interior, a fronteira, os pontos aderentes, os pontos de acumulação e os pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos:

(i) $A =]3, 5[$

(ii) $A = [3, 5[$

(iii) $A = [3, 5]$

(iv) $A = [3, 5] \cup \{7, 8, 10\}$

(v) $A = \mathbb{N}$

(vi) $A = \mathbb{Q}$

(vii) $A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

(viii) $A = [0, 2] \cap [2, 3]$

(ix) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq \sqrt{2}\}$

Exercício 2: Prove que, para quaisquer conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$:

(i) $A \subseteq \overline{A}$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(iii) $\overline{A} \bigcup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(iv) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \bigcap \overline{B}$
Mostre, com um exemplo, que a igualdade pode não ocorrer.

(v) $\overline{A} = A \bigcup \partial A$.

Exercício 3: Para um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, mostre que são equivalentes:

(i) A é fechado.

(ii) $\partial A \subseteq A$.

(iii) A contém todos os seus pontos de acumulação.

Exercício 4:

(a) Prove que se $\{F_i : i \in I\}$ é uma família de conjuntos fechados em $\mathbb{R}$, então a interseção $\bigcap_{i \in I} F_i$ também é um conjunto fechado.

(b) Prove que se F_1 e F_2 são fechados em $\mathbb{R}$, então $F_1 \bigcup F_2$ é fechado em $\mathbb{R}$. Mostre, com um exemplo, que a união de uma coleção qualquer de conjuntos fechados pode não ser fechado.

Definição: Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto se é fechado e limitado.

Teorema: As seguintes afirmações são equivalentes, para $A \subseteq \mathbb{R}$:

(I) K é compacto.

(II) Toda cobertura do conjunto K por abertos admite uma subcobertura finita, isto é: Se $\{\theta_i, i \in I\}$ é uma coleção de conjuntos abertos que recobre K ($K \subseteq \bigcup_{i \in I} \theta_i$) então existe um conjunto finito $J \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in J} \theta_i$.

(III) Todo subconjunto infinito de K possui ponto de acumulação em K.

Exercício 5: Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são compactos ou não, justificando:

(i) $[1, 3[$

(ii) $[1, 3] \cap \mathbb{Q}$

(iii) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

(iv) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$