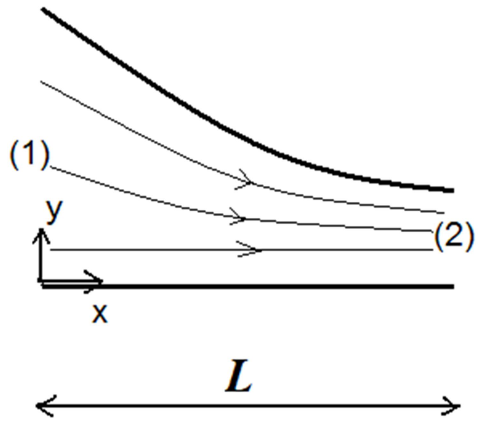
1ª Prova de Mecânica dos Fluidos II – PME3330 27/04/2023

Nome:____NUSP:__________

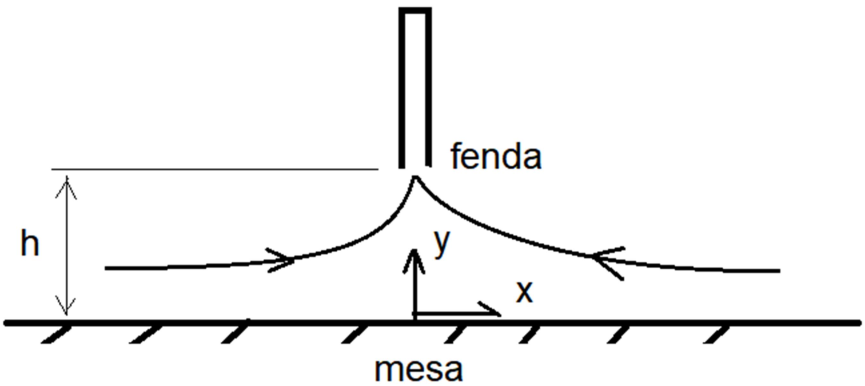
1ª Questão (3,0 pontos) - Temos um escoamento permanente, bidimensional, compressível e não-viscoso em um duto convergente. A componente de velocidade u na direção x e a massa específica ρ variam linearmente apenas com x de modo que $u = u_1 + C_u\, x$ e $\rho = \rho_1 + C_\rho\, x$, onde C_u e C_ρ são constantes. A parede inferior do duto é plana e a parede superior é curvilínea conforme a figura. Obtenha uma expressão para a componente da velocidade v na direção y de modo que $v = v(x, y)$.



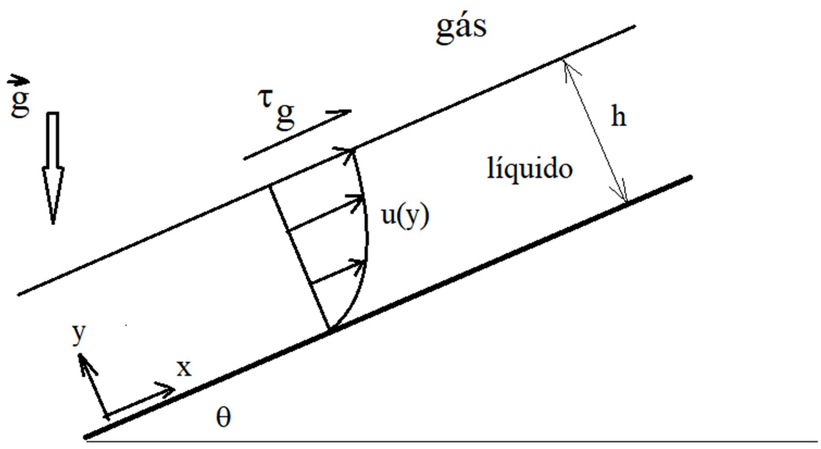
2ª Questão (3,0 pontos) - Uma fenda de exaustão com um comprimento muito longo na direção normal ao plano da figura, localizada a uma altura h sobre uma mesa, aspira o ar de massa específica ρ gerando um campo de velocidades que pode ser aproximado como bidimensional, incompressível, irrotacional e não-viscoso. As velocidades entre a fenda e a mesa são dadas por:

$$u = \frac{C}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2+(y-h)^2} + \frac{x}{x^2+(y+h)^2}\right] \;;\; v = \frac{C}{2\pi}\left[\frac{(y-h)}{x^2+(y-h)^2} + \frac{(y+h)}{x^2+(y+h)^2}\right]$$ onde C é uma constante.

A pressão no ponto $x = 0,\ y = 0$ é p_o. Determine a posição x sobre a superfície da mesa onde temos a pressão mínima e o seu valor.



3ª Questão (4,0 pontos) – Um filme de líquido viscoso de massa específica ρ e viscosidade dinâmica μ sobe contra o efeito da gravidade ao longo de um plano inclinado arrastado pela ação da tensão de cisalhamento τ_g exercida na interface gás-líquido por uma corrente de gás paralela. Considere a altura h do filme constante, a velocidade v na direção y como sendo nula, e um escoamento permanente, incompressível, bidimensional e laminar. O gás na interface com o líquido está a uma pressão constante p_g. Determine a vazão de líquido por unidade de largura Q/b, onde b é a largura do filme na direção ortogonal ao plano da figura.



Formulário

Continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$

Eq, de Bernoulli para escoamento incompressível: $\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = constante$

Eq. de Navier-Stokes: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{V} + \vec{g}$

Onde $\vec{V}.\nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ e $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Vazão: $Q = \int_S \vec{V}.\vec{n}\,dS$

Gabarito

1ª Questão (3,0 pontos) – Da equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Para um escoamento permanente e bidimensional:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

Isso resulta:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\left(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho + 2 C_u C_\rho x\right)$$

Integrando:

$$\rho v = -\left(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho + 2 C_u C_\rho x\right) y + f(x)$$

Como para $y = 0$ temos $v = 0$, resulta que $f(x) = 0$. Assim:

$$v = -\frac{\left(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho + 2 C_u C_\rho x\right)}{\rho} y$$

Ou:

$$v = -\frac{\left(\rho_1 C_u + u_1 C_\rho + 2 C_u C_\rho x\right)}{\rho_1 + C_\rho x} y$$

2ª Questão (3,0 pontos) – As velocidades sobre a mesa $(y = 0)$ são:

$$u = \frac{Cx}{\pi(x^2 + h^2)} \;\; ; \quad v = 0$$

Assim, usando a equação de Bernoulli para escoamento incompressível, ignorando a gravidade pois o fluido é muito leve (ar):

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = contante$$

Como para $x = 0$ temos $u = 0$ e $p = p_o$:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_o}{\rho}$$

E a distribuição de pressões sobre a parede resulta:

$$p = p_o - \rho \frac{C^2 x^2}{2\pi^2 (x^2 + h^2)^2}$$

Derivando em relação a x e igualando a zero para obter pontos de máximo e mínimo:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \frac{C^2}{2\pi^2} \left[\frac{2x}{(x^2 + h^2)^2} + \frac{x^2.(-2).2x}{(x^2 + h^2)^3} \right] = 0$$

Isso resulta:

$$\frac{x(x^2 + h^2) - 2x^3}{(x^2 + h^2)^3} = 0$$

Ou:

$$x(x^2 + h^2 - 2x^2) = 0$$

Resulta ponto de pressão máxima em $x = 0$ com $p = p_o$ e pontos de pressão mínima em $x = \pm h$ com pressão $p = p_o - \rho \frac{C^2}{8\pi^2 h^2}$.

3ª Questão (4,0 pontos) – Da equação da continuidade, para escoamento incompressível e bidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Como $v = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Das componentes x e y da equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível e bidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + g_y$$

Temos que $g_x = -g\, sen\, \theta$ e $g_y = -g\, cos\, \theta$. Além disso, do resultado da equação da continuidade e lembrando que o escoamento é permanente e que $v = 0$:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g\, sen\, \theta = 0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\ cos\ \theta = 0$$

Desta última equação:

$$p = \ -\rho g y \cos\theta + f(x)$$

Como para $y = h$ temos $p = p_g$:

$$p = p_g + \rho g(h - y)\ cos\ \theta$$

Deste último resultado temos que $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Além disso, como $u = u(y)$ dado que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, a equação de Navier-Stokes na direção x resulta:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\rho}{\mu} g\ sen\ \theta$$

Integrando a primeira vez:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho}{\mu} g y\ sen\ \theta + C_1$$

Integrando a segunda vez:

$$u = \frac{\rho}{\mu} g \frac{y^2}{2}\ sen\ \theta + C_1 y + C_2$$

Para $y = 0$ temos $u = 0$, logo C_2=0.

Para $y = h$ temos que a tensão de cisalhamento é a tensão de cisalhamento causada pelo gás na interface. Assim:

$$\mu \frac{du}{dy}_{y=h} = \rho gh\, sen\, \theta + \mu C_1 = \tau_g$$

Assim:

$$C_1 = \frac{\tau_g}{\mu} - \frac{\rho}{\mu}\, gh\, sen\, \theta$$

E o perfil de velocidades resulta:

$$u = \frac{\rho}{\mu} g \left(\frac{y^2}{2} - hy\right) sen\, \theta + \frac{\tau_g}{\mu}\, y$$

A vazão é obtida integrando esse perfil na altura do filme:

$$Q = \int_0^h u(y) b\, dy$$

Isso resulta:

$$\frac{Q}{b} = \left[\frac{\rho}{\mu} g \left(\frac{y^3}{6} - h\frac{y^2}{2}\right) sen\, \theta + \frac{\tau_g}{\mu}\frac{y^2}{2}\right]_0^h$$

Finalmente:

$$\frac{Q}{b} = \frac{\tau_g}{\mu}\frac{h^2}{2} - \frac{\rho}{\mu} g \frac{h^3}{3} sen\, \theta$$