Primeira Prova de MAP 3210 - 2023
BMA - IME USP, aos 26 de abril de 2023

Questão 1 Considere a equação $(t^2+t)\dot{x}+x = t(t+1)^2e^{-t^2}$, $(t,x) \in (-1,0)\times\mathbb{R}$

(i) Ache a solução geral dessa equação. (1,0 ponto)

(ii) Existe alguma solução dessa equação que tem limite finito para $t \to 0-$? Quantas existem com essa propriedade? (0,5 ponto)

(iii) Existe alguma solução dessa equação que tem limite finito para $t \to -1+$? Quantas existem com essa propriedade? (0,5 ponto)

Questão 2 (2,0 pontos) Determine a solução não prolongável de

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + \sin\frac{x}{t} \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Questão 3 (Cada item vale 0.5 ponto) Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a solução não prolongável de

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2x^2+t}{3x^2+5} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

(i) Mostre que φ tem um ponto crítico em 0 e determine se esse é um ponto de mínimo local, de máximo local, ou de sela, de φ.

(ii) Existe mais algum ponto de crítico de φ?

(iii) Mostre que φ é crescente no intervalo $(0,+\infty)$ e que existem constantes $a>0$ e $b>0$ tais que $\varphi(t) \geq at-b$, para todo $t \geq \frac{10}{3}$.
Sugestão: Para a última parte prove primeiro que $\dot{\varphi}(t) \geq \frac{2}{3}$, se $t \geq \frac{10}{3}$.

(iv) Prove que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\varphi^2(t)} = 0$.

(v) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}$.

(vi) Aplique o método de Euler com $h=\frac{1}{4}$ para encontrar uma aproximação de φ no intervalo $[0,1]$.

Questão 4 Considere o problema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(4 - x^2) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

(i) Ache a solução não prolongável, $\varphi(t)$ desse problema. (1,0 ponto)

(ii) Use o método de Euler explícito no intervalo $[0, 1]$ com $n = 4$ e encontre a aproximação de $\varphi(1)$ nesse caso. (1,0 ponto)

Questão 5 Considere a equação $\dot{x} = f(t, x) = \frac{x}{x^2+t^2+1}$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(i) Mostre que $\psi(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$, é solução desta e.d.o. (0.5 ponto)

(ii) Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $|x_0| < \varepsilon$ e $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é a solução não prolongável de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

então $|\varphi(t)| < 10^{-4}$, para todo $t \in [0, 1000]$ (2.5 pontos).

Presente para vocês: Uma primitiva de $\frac{1}{\sin w}$ é

$$\log(\sin \frac{w}{2}) - \log(\cos \frac{w}{2})$$