Resolução Numérica de Sistemas de EDOs com VI

Galo Carrillo Le Roux

Princípios

- Solução sequêncial

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \quad \text{em} \quad y(t_0) = y_0$$

$$y_0 \rightarrow \tilde{y}(t_1) \rightarrow \tilde{y}(t_2) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{y}(t_n)$$

Não é um integração!!

$$\tilde{y}(t_1) \neq \int_{t_0}^{t_1} f(y,t)\,dt$$

Euler Explícito

Fórmula:

$$\tilde{y}(t_{i+1}) = \tilde{y}(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\, f(\tilde{y}(t_i), t_i)$$

Passo: $t_{i+1} - t_i = h_i$

Passo constante: $h_i = h$

Euler explícito com passo constante: $\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h\, f(\tilde{y}_i, t_i)$

Euler explícito - Erros

- Erro de truncamento local

$$y_n = y_{n-1} + h\, f(y_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_\xi$$

com $t_{n-1} < \xi < t_n$

$$y_n = y_{n-1} + h\, f(y_{n-1}, t_{n-1}) + O(h^2)$$

- Erro de truncamento global

$$O(h) = n \times O(h^2) = \frac{T_f}{h} O(h^2) = O(h)$$

porque

$$n = \frac{T_f}{h}$$

Euler explícito – para sistemas

$$\hat{\underline{y}}_{n+1} = \hat{\underline{y}}_n + h\,\underline{f}(\tilde{\underline{y}}_n, t_n)$$

Euler explícito - estabilidade

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y$$

$$z_n = y_n + e_n$$

$$z_{n+1} = z_n + h \lambda z_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h \lambda y_n$$

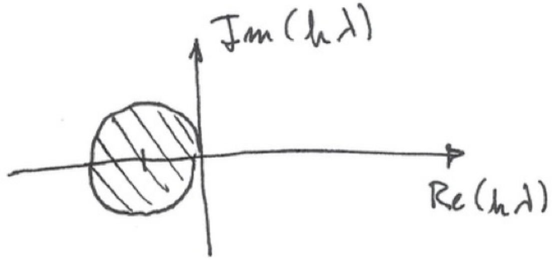
$$e_{n+1} = e_n + h \lambda e_n = (1 + h\lambda) e_n$$

Euler explícito - estabilidade

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \leq 1$$

$$|1 + h\lambda| \leq 1$$

- A regia de estabilidade pode ser representada no plano complexo:

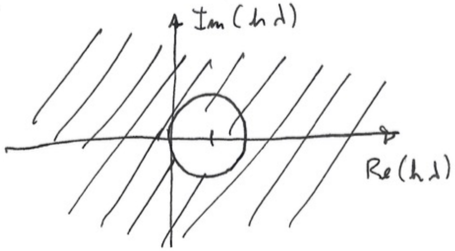


Euler implícito

$$y_n = y_{n-1} + h f(y_n, t_n)$$

- Erros de truncamento local e global similares ao Euler explícito
- Estabilidade

$$y_n = y_{n-1} + h\lambda y_{n-1} \qquad |1 - h\lambda| > 1$$



Conclusões

- Sistemas com autovalores com partes reais positivas são instáveis
- Para a estabilidade de sistemas pode-se calcular um passo para cada auto-valor, o passo menor é o que tem que ser adotado
- Na resolução de sistemas há um compromisso entre precisão, estabilidade e trabalho computacional
- Por exemplo, para um algoritmo implícito é necessário resolver um sistema de equações algébricas, que tem que ser resolvido iterativamente:

$$y_n = y_{n-1} + h\, f(y_n, t_n)$$

- O trabalho é maior e o ganho de estabilidade tem que valer a pena
- Nem todo método implícito é estável independentemente do valor de λ (chamado A-estável)

Conclusões

- Sistemas não lineares tem auto-valores que variam dependendo do valor dos estados
- Nenhum método de resolução numérica de EDOs calcula os auto-valores do sistema
- Os sistemas que apresentam alguns autovalores muito negativos (menores que -10^5) são chamados de sistemas stiff
- Stiffness ratio: $\dfrac{|\mathrm{Re}(\overline{\lambda})|}{|\mathrm{Re}(\underline{\lambda})|}$
- Um sistema muito stiff obrigaria a usar um passo muito pequeno a fim de manter a estabilidade