GABARITO - Lista de Exercícios para Prova 1

1) Single: (1) s, (8) e, 23 (m)

a) $1 + 8 + 23 = 32$ bits $\qquad x = (-1)^s . (1,m) . 2^{e-b}$

b) Maior número real representado:

$e = [e_{min}, e_{max}]$:

• $e_{max} = \underbrace{(11111110)_2}_{8 \text{ bits}} = 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = (254)_{10}$ ✓

• $e_{min} = (00000001)_2 = 1.2^0 = (1)_{10}$ ✓

Logo, $e = [1, 254] \Rightarrow b = 127 \Rightarrow E = [\underset{L}{-126}, \underset{U}{127}]$

$(E = [1-b, 254-b])$

$\therefore x_{max} = \underset{1 \text{ bit}}{0} \; \underbrace{11111110}_{8 \text{ bits}} \; \underbrace{11111111111111111111111}_{23 \text{ bits}} =$

$= (-1)^0 . 1,11111111111111111111111 \times 2^{\overbrace{(11111110)_2}^{e_{max}} - (127)_{10}}$

$= [1.2^0 + (1 - 2^{-23})] \times 2^{127}$

$= (2 - 2^{-23}) . 2^{127} = 2^{128} - 2^{104} = 3,4028235 \times 10^{38}$ ■

c) $x_{min} = \underset{1 \text{ bit}}{0} \; \underbrace{00000001}_{8 \text{ bits}} \; \underbrace{00000000000000000000000}_{23 \text{ bits}}$

$= (-1)^0 \; 1,00000000000000000000000 \times 2^{\overbrace{(00000001)_2}^{e_{min}} - (127)_{10}}$

$= (1.2^0) \times 2^{-126} = 1,1754944 \times 10^{-38}$ ■

d) $\beta = 2$, $t = 23 + 1 = 24$, $L = -126$, $U = 127$

$\therefore \mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$ //

sendo: β (base), t = mantissa + 1, $\rightarrow$ dígito implícito

L (menor expoente)

U (maior expoente)

2) $\mathbb{F}(\underset{\beta}{2}, \underset{t}{4}, \underset{L}{-30}, \underset{U}{31}) \rightarrow$ base : $\beta = 2$

→ dígito implícito

mantissa : $t - 1 = 4 - 1 = 3$

menor expoente : $L = -30$

maior expoente : $U = 31$

a) Temos: 1 bit para o sinal ✓

3 bits para a mantissa ✓

Expoente : $\underset{b = 31}{E = [-30, 31]} \Rightarrow \underset{e = E + b}{e = [1, 62]} \Rightarrow \begin{cases} e\text{-max} = (62)_{10} \\ e\text{-min} = (1)_{10} \end{cases}$

Passando $(62)_{10}$ para base $\beta = 2$:

$$\begin{array}{lllllll} 62 & \lfloor 2 & & & & & \\ 0 & 31 & \lfloor 2 & & & & \\ & 1 & 15 & \lfloor 2 & & & \\ & & 1 & 7 & \lfloor 2 & & \\ & & & 1 & 3 & \lfloor 2 & \\ & & & & 1 & 1 & \lfloor 2 \\ & & & & & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore (62)_{10} = (\underbrace{111110}_{6 \text{ bits}})_2$ ✓

Assim: $1(s) + 3(m) + 6(e)$
$= 10$ bits

$[1 \cdot 2^0 + (1 - 2^{-3})] \cdot 2^{31}$

b) $x\text{-max} = (\beta - \beta^{-m})\,\beta^U = (2 - 2^{-3}) \cdot 2^{31} = 4{,}0265 \cdot 10^9$

$[1 \cdot 2^0] \cdot 2^{-30}$

c) $x\text{-min} = 1 \cdot \beta^L = 2^{-30} = 9{,}3132 \cdot 10^{-10}$

3) Matrizes quadradas $A_{n \times n}$:

a) O determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

b) Sendo a decomposição LU de uma matriz A e sabendo que $A = LU$, então $\det(A) = \det(LU)$.

Além disso, pelas propriedades dos determinantes segue que ao considerar duas matrizes quadradas de ordem iguais temos $\det(F.G) = \det(F).\det(G)$

Portanto, $\det(A) = \det(LU) = \det(L).\det(U)$

Sabendo que L é triangular inferior com 1's na diagonal, então $\det(L) = 1$ e portanto

$$\det(A) = \det(U)$$

Além disso, como U é triangular superior, $\det(U) = u_{11}.u_{22}.\dots.u_{nn}$. Portanto

$$\det(A) = u_{11}.u_{22}.\dots.u_{nn} \quad \blacksquare$$

c) Para o caso $PA = LU$, temos

$$\det(PA) = \det(LU)$$
$$\det(P).\det(A) = \det(L).\det(U)$$
$$\det(P).\det(A) = u_{11}.u_{22}.\dots.u_{nn}$$

Lembrando que P é matriz de permutação e portanto $\det(P) = \pm 1$.

④ Operação elementar é uma operação que quando aplicada preserva a solução do sistema. São elas:

- $E_p(c)$ = multiplicação da linha p por $c \neq 0$
- E_{pq} = troca as linhas p e q
- $E_{pq}(c)$ = soma à linha p a linha q vezes $c \neq 0$

D	S	T	Q	Q	S	S

5) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

a) $A\vec{x} = \vec{b}$: $\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}}_{b}$

b) $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} & A & & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 8 \end{array}\right] \end{array}$

• zerar a_{21} : $m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{1}{4}$

$a_{21} = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 4 = 0$; $a_{22} = 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0 = 2$

$E_{21}(-m_{21})$

$a_{23} = 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-2) = \frac{5}{2}$; $b_2 = 3 + \left(-\frac{1}{4}\right)(-1) = \frac{13}{4}$

• zerar a_{31} : $m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$E_{31}(-m_{31})$

$a_{31} = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 0$; $a_{32} = -4 + \left(-\frac{1}{2}\right) 0 = -4$

$a_{33} = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 4$; $b_3 = 8 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{17}{2}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 5/2 & 13/4 \\ 0 & -4 & 4 & 17/2 \end{array}\right]$

• zerar a_{32} : $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{(-4)}{2} = 2$

$a_{32} = -4 + 2 \cdot 2 = 0$; $a_{33} = 4 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 9$

$E_{32}(-m_{32})$

$b_3 = \frac{17}{2} + 2 \cdot \frac{13}{4} = \frac{30}{2} = 15$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 5/2 & 13/4 \\ 0 & 0 & 9 & 15 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} 4x_1 + -2x_3 = -1 \\ 2x_2 + \frac{5}{2} x_3 = 13/4 \\ 9x_3 = 15 \end{cases} \quad (*)$

Resolvendo (*) por substituições sucessivas:

$$x_3 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \quad ; \quad x_2 = \left(\frac{13}{4} - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right)/2 = \left(\frac{13}{8} - \frac{25}{12}\right) = \frac{39-50}{24} = \frac{-11}{24}$$

$$x_1 = \left[-1 + 2.\left(\frac{5}{3}\right)\right]/4 = \frac{-3+10}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore \quad x = \begin{pmatrix} 7/12 \\ -11/24 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

c) Decomposição LU: Já tendo realizado a solução pelo método de Gauss, a decomposição LU pode ser facilmente obtida

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad e \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}, \text{ sendo } \begin{aligned} m_{21} &= -1/4 \\ m_{31} &= -1/2 \\ m_{32} &= 2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}_{U}$$

d) $\det(A) = \overset{1}{\cancel{\det(L)}} . \det(U) = \det(U) = 4 . 2 . 9 = 72$

e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ Para encontrar a decomposição $PA = LU$, devemos realizar o método de Gauss com pivotamento

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

No primeiro passo, o objetivo é zerar os elementos da primeira coluna que estão abaixo da diagonal principal. Note que $4 = \max\{|4|, |1|, |2|\}$. Assim, 4 deve ser o pivô, e neste caso não há necessidade de trocar linhas, pois ele já ocupa a posição a_{11}.

• zerar a_{21} : $m_{21} = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -\dfrac{1}{4}$

$a_{21} = 1 + \left(-\dfrac{1}{4}\right) \cdot 4 = 0$;

$a_{22} = 2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right) \cdot 0 = 2$;

$a_{23} = 2 + \left(-\dfrac{1}{4}\right) \cdot (-2) = \dfrac{5}{2}$.

• zerar a_{31} : $m_{31} = -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$a_{31} = 2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot 4 = 0$

$a_{32} = -4 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) 0 = -4$

$a_{33} = 3 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 4$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Agora, no segundo passo o pivô deve ser -4, pois $|-4| > |2|$. Porém o pivô deve ocupar a posição a_{22}, e por isso precisamos trocar as linhas 2 e 3, utilizando a operação E_{23} em A

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$E_{23}[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{-4} & 4 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

* os elementos m_{21} e m_{31} também devem ser trocados na matriz L.

- Agora o objetivo é zerar os elementos da segunda coluna que estão abaixo da diagonal principal

- zerar a_{32}: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$a_{32} = 2 + \frac{1}{2}(-4) = 0$

$a_{33} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{9}{2}$

Assim obtemos $U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Note que os elementos m_{31} e m_{21} aparecem trocados na matriz L. Isso ocorre por causa da troca de linhas do pivotamento.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}}_{U}$$

f) $\det(PA) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot 9/2 = -72$

Portanto, $\det(PA) = -72 \neq 72 = \det(A)$

Determinante de PA é diferente do determinante de A ($\det(PA) = -\det(A)$), pois cada operação de troca de linhas $[E_{pq}]$ inverte o sinal do determinante.

D	S	T	Q	Q	S	S

g) Queremos encontrar A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_1^{-1} \quad \vec{a}_2^{-1} \quad \vec{a}_3^{-1} \qquad \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

Assim, definimos o sistema

$$A. \vec{a}_i^{-1} = \vec{e}_i$$

ou seja $\vec{a}_i^{-1}$ são os vetores coluna da inversa de A

Para resolver este problema usando a decomposição $PA = LU$, temos

$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$PA\vec{x} = P\vec{b}$$
$$\underbrace{LU\vec{x}}_{\vec{y}} = P\vec{b}$$

$$L\vec{y} = P\vec{b} \quad (1)$$
$$U\vec{x} = \vec{y} \quad (2)$$

Conhecendo

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} ; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Para $i = 1$:

$\rightarrow L\vec{y} = P\vec{e}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= -1/2 \\ y_3 &= -1/2 \end{aligned}$$

$\rightarrow U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= -1/9 \\ x_2 &= (1/2 - 4/9) \cdot \tfrac{1}{4} = 1/72 \\ x_1 &= (1 - 2/9) \cdot \tfrac{1}{4} = 7/36 \end{aligned}$$

· Para $i=2$:

$$\to L\vec{y} = P\vec{e}_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{array}$$

$$\to U\vec{x} = \vec{y} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2/9 \\ x_2 = (4 \cdot 2/9)\frac{1}{4} = 2/9 \\ x_1 = (2 \cdot 2/9)\frac{1}{4} = 1/9 \end{array}$$

· Para $i=3$:

$$\to L\vec{y} = P\vec{e}_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1/2 \end{array}$$

$$\to U\vec{x} = \vec{y} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1/9 \\ x_2 = (-1 + 4/9)\frac{1}{4} = -5/36 \\ x_1 = 2/9 \cdot 1/4 = 2/36 \end{array}$$

Portanto, $\vec{a}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 7/36 \\ 1/72 \\ -1/9 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2/36 \\ -5/36 \\ 1/9 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \left[\vec{a}_1^{-1}\ \vec{a}_2^{-1}\ \vec{a}_3^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 7/36 & 1/9 & 2/36 \\ 1/72 & 2/9 & -5/36 \\ -1/9 & 2/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$ ∎

D	S	T	Q	Q	S	S

(6) Um método iterativo é um procedimento que fornece uma sequência de aproximações da solução, cada uma das quais obtida das anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo:

$$x^{k} = f(x^{k-1})$$

e que quando convergente, tem-se

$$\lim_{k \to \infty} \| x^{k} - x \| = 0$$

onde x é a solução do problema.

Como dificilmente o caso $x^{k} = x$ será atingido, é necessário estabelecer um critério de parada para que ao atingir uma precisão satisfatória ou um número máximo de iterações o processo seja interrompido.

(7) O método de Gauss-Seidel converge mais rápido geralmente, visto que as variáveis já atualizadas são utilizadas imediatamente, não sendo necessário esperar à próxima iteração como ocorre no método de Gauss-Jacobi.

(8) O método de Gauss-Jacobi é mais eficiente quando paralelizado pois a atualização dos componentes ocorre simultaneamente ($x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$ podem ser obtidas ao mesmo tempo, já que só dependem das componentes obtidas na iteração anterior) ao contrário do método de Gauss-Seidel onde as componentes são atualizadas de forma sequencial: $x_2^{(k+1)}$ só pode ser atualizada depois da atualização de $x_1^{(k+1)}$, e assim por diante.

9)
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 2 & -1 & 2\alpha \\ \alpha & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\therefore n = 3}$

a) $\alpha = 0$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{b}$$

• zerar a_{21} : $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} = -2$

$a_{21} = 2 + (-2).1 = 0$; $a_{22} = -1 + (-2).4 = -9$

$a_{31} = 0 + (-2).0 = 0$; $b_2 = 3 + (-2).6 = -9$

• zerar a_{31}: já é zero!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{-9} & 0 & -9 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

• zerar a_{32} : $m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} = -3/-9 = 1/3$

$a_{32} = 3 + \frac{1}{3}(-9) = 0$; $a_{33} = 1 + \frac{1}{3}.0 = 1$; $b_3 = 5 + \frac{1}{3}(-9) = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
A

Observe que:
Posto da matriz aumentada é igual ao posto de A que é igual a $n = 3$.
$\therefore$ solução única

Resolvendo por subst regressiva:

$x_3 = 2$; $x_2 = 1$; $x_1 = 2$ //

* posto(A) é o nº de linhas não nulas de A

b) $\alpha = 1$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{b}$$

• zerar a_{21} : $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} = -2$

$a_{21} = 2 + (-2).1 = 0$; $a_{22} = -1 + (-2).4 = -9$

$a_{23} = 2 + (-2).1 = 0$; $b_2 = 3 + (-2).6 = -9$

• zerar a_{31}: $m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}} = -1$

$a_{31} = 1 + (-1).1 = 0$; $a_{32} = 3 + (-1).4 = -1$

$a_{33} = 1 + (-1).1 = 0$; $b_3 = 5 + (-1).6 = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-9} & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

• zerar a_{32} : $m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} = -1/9$

$a_{32} = -1 + \left(-\frac{1}{9}\right).(-9) = 0$; $a_{33} = 0 + \left(-\frac{1}{9}\right)0 = 0$;

$b_3 = -1 + \left(-\frac{1}{9}\right).(-9) = 0$

D	S	T	Q	Q	S	S

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\begin{matrix} | & 6 \\ | & -9 \\ | & 0 \end{matrix}$$

Observe que:
O posto da matriz aumentada é igual ao posto de A, que é menor que $n=3$
$\therefore$ Existem infinitas soluções

$x_3 =$ qualquer valor, $x_2 = 1$, $x_1 = 2 - x_3$

c) $\alpha = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

A b

• zerar a_{21}: $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} = -2$

$a_{21} = 2 + (-2).1 = 0$; $a_{22} = -1 + (-2).4 = -9$

$a_{32} = -2 + (-2).(-1) = 0$; $b_2 = 3 + (-2).6 = -9$

• zerar a_{31} : $m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = 1$

$a_{31} = -1 + (1).1 = 0$; $a_{32} = 3 + 1.4 = 7$

$a_{33} = 1 + 1.(-1) = 0$; $b_3 = 5 + 1.6 = 11$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{-9} & 0 & -9 \\ 0 & 7 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

• zerar a_{32}: $m_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = 7/9$

$a_{32} = 7 + \frac{7}{9}.(-9) = 0$; $a_{33} = 0 + \frac{7}{9}.0 = 0$

$b_3 = 11 + \frac{7}{9}.(-9) = 4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\begin{matrix} | & 6 \\ | & -9 \\ | & 4 \end{matrix}$$

Observe que:
O posto da matriz aumentada é maior que o posto de A
$\therefore \nexists$ soluções

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$ (impossível!)

10 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}_{U}$

Se A é triangular superior, então $U = A$ e L é a matriz identidade.

11 • $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$

• zerar a_{21} : $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} = -a_{21}$

$a_{21} = a_{21} + (-a_{21}).1 = 0 \quad a_{22} = 1 + (-a_{21}).0 = 1$

$a_{23} = 0 + (-a_{21}).0 = 0$

• zerar a_{31} = $m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}} = -a_{31}$

$a_{31} = a_{31} + (-a_{31}).1 = 0 \quad a_{32} = a_{32} + (-a_{31}).0 = a_{32}$

$a_{33} = 1 + (-a_{31}).0 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$

• zerar a_{32} : $m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} = -a_{32}$

$a_{32} = a_{32} + (-a_{32}).1 = 0$

$a_{33} = 1 + (-a_{32}).0 = 1$

$\downarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} = A$

Portanto, se A é triangular inferior com 1's na diagonal principal, então $L = A$ e U é a matriz identidade

• $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

• zerar a_{21} : $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$

$a_{21} = a_{21} + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).a_{11} = 0; \quad a_{22} = a_{22} + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).0 = a_{22}$

$a_{32} = 0 + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).0 = 0$

• zerar a_{31} : $m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$

$a_{31} = a_{31} + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right).a_{11} = 0; \quad a_{32} = a_{32} + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right).0 = a_{32}$

$a_{33} = a_{33} + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right).0 = a_{33}$

D	S	T	Q	Q	S	S

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

• zerar a_{32} : $m_{32} = \frac{-a_{32}}{a_{22}}$

$a_{32} = a_{32} + \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}}\right) . a_{22} = 0$; $a_{33} = a_{33} + \left(\frac{-a_{32}}{a_{22}}\right) . 0 = a_{33}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = U \; ; \; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}/a_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

12) $f(x) = 4x - e^x = 0$

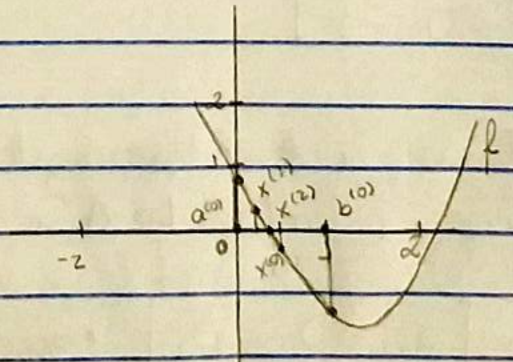
• $[0,1]$: $\left.\begin{array}{l} f(0) = 4.0 - e^0 = -1 < 0 \\ f(1) = 4.1 - e^1 = 4 - e = 1{,}28 > 0 \end{array}\right\} f(0).f(1) < 0$

$\therefore$ a funcao $f(x)=0$ possui raiz no intervalo $(0,1)$

• $[2,3]$: $\left.\begin{array}{l} f(2) = 4.2 - e^2 = 8 - e^2 = 0{,}61 > 0 \\ f(3) = 4.3 - e^3 = 12 - e^3 = -8{,}09 < 0 \end{array}\right\} f(2).f(3) < 0$

$\therefore$ a funcao $f(x)=0$ possui raiz no intervalo $(2,3)$

13) a) $exp(x) - 4x = 0 = f(x)$



$\left.\begin{array}{l} a^{(0)} = 0 \rightarrow f(a^{(0)}) = 1 \\ b^{(0)} = 1 \rightarrow f(b^{(0)}) = -1{,}28 \end{array}\right\} \checkmark$

$x^{(0)} = 0{,}5 \rightarrow f(x^{(0)}) = -0{,}35 < 0$

Entao $b^{(1)} = x^{(0)}$ e $a^{(1)} = a^{(0)}$

$\left.\begin{array}{l} a^{(1)} = 0 \rightarrow f(a^{(1)}) = 1 \\ b^{(1)} = 0{,}5 \rightarrow f(b^{(1)}) = -0{,}35 \end{array}\right\} \checkmark$

$x^{(1)} = 0{,}25 \rightarrow f(x^{(1)}) = 0{,}28 > 0$

Entao $a^{(2)} = x^{(1)}$ e $b^{(2)} = b^{(1)}$

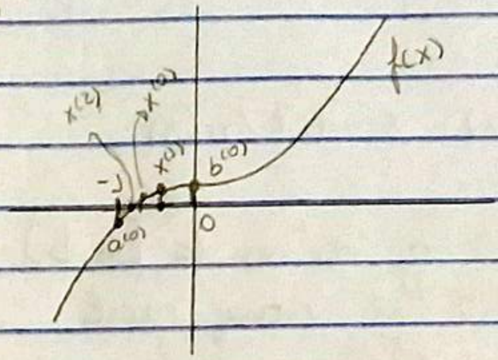
$\left.\begin{array}{l} a^{(2)} = 0{,}25 \rightarrow f(a^{(2)}) = 0{,}28 \\ b^{(2)} = 0{,}5 \rightarrow f(b^{(2)}) = -0{,}35 \end{array}\right\} \checkmark$

$x^{(2)} = 0{,}375 \rightarrow f(x^{(2)}) = -0{,}045 < 0$

Entao $a^{(3)} = a^{(2)}$ e $b^{(3)} = x^{(2)}$ (...)

b) $x^3 + \cos(x) = 0 = f(x)$

Vamos escolher o intervalo $[-1, 0]$



$a^{(0)} = -1 \rightarrow f(a^{(0)}) = -0,46$ ✓

$b^{(0)} = 0 \rightarrow f(b^{(0)}) = 1$

$x^{(0)} = -0,5 \rightarrow f(x^{(0)}) = 0,75 > 0$

Então $a^{(1)} = a^{(0)}$ e $b^{(1)} = x^{(0)}$

$a^{(1)} = -1 \rightarrow f(a^{(1)}) = -0,46$ ✓

$b^{(1)} = -0,5 \rightarrow f(b^{(1)}) = 0,75$

$x^{(1)} = -0,75 \rightarrow f(x^{(1)}) = 0,31 > 0$

Então $a^{(2)} = a^{(1)}$ e $b^{(2)} = x^{(1)}$

$a^{(2)} = -1 \rightarrow f(a^{(2)}) = -0,46$

$b^{(2)} = -0,75 \rightarrow f(b^{(2)}) = 0,31$

$x^{(2)} = -0,875 \rightarrow f(x^{(2)}) = -0,029 < 0$

Então $a^{(3)} = x^{(2)}$ e $b^{(3)} = b^{(2)}$ (...)

14) Usar o método de Newton para determinar π ($x^{(0)} = 3$)

Sabemos que $\cos(\pi/2) = 0$, portanto π é raiz da função $f(x) = \cos(x/2) = 0$. Assim, temos

- $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$; • $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

• Método de Newton: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

Aplicando o método, considerando $x^{(0)} = 3$, temos

$x^{(0)} = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 0,71 \\ f'(3) = -0,5 \end{cases}$ $x^{(1)} = 3 - \left(\frac{-0,71}{0,5}\right) = 3,1418$

$x^{(1)} = 3,1418 \Rightarrow \begin{cases} f(3,1418) = -1,1852 \cdot 10^{-4} \\ f'(3,1418) = -0,5 \end{cases}$ $x^{(2)} = 3,1418 - \left(\frac{1,1852 \cdot 10^{-4}}{0,5}\right) = 3,14159$

$\therefore \pi \approx x = 3,14159$

15) Método das Secantes $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{\left(\dfrac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}\right)}$

a) $f(x) = x - 2{,}7\ln(x)$

- Não há intervalo $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Não há raiz real

Dica: Plote o gráfico de $f(x)$ no Matlab/Octave e veja que a curva não passa sobre o eixo x, ou então plote $h(x) = x$ e $g(x) = 2{,}7\ln(x)$ e veja que ambas as curvas não se interceptam

b) $f(x) = \log(x) - \cos(x)$ (Vamos escolher $x^{(0)} = 1$ e $x^{(1)} = 2$)

$x^{(0)} = 1 \rightarrow f(x^{(0)}) = -0{,}54$
$x^{(1)} = 2 \rightarrow f(x^{(1)}) = 1{,}11$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{\dfrac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{(x^{(1)} - x^{(0)})}} = 2 - \frac{1{,}11}{\left(\dfrac{1{,}11 - (-0{,}54)}{2 - 1}\right)} = 2 - \frac{1{,}11}{1{,}11 + 0{,}54} = 1{,}33$$

$x^{(2)} = 1{,}33 \rightarrow f(x^{(2)}) = 0{,}042$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{\dfrac{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}{x^{(2)} - x^{(1)}}} = 1{,}33 - \frac{0{,}042}{\left(\dfrac{0{,}042 - 1{,}11}{1{,}33 - 2}\right)} = 1{,}27$$

$x^{(3)} = 1{,}27 \rightarrow f(x^{(3)}) = -0{,}055$ (...)

c) $f(x) = e^{-x} - \log(x)$ (Vamos escolher $x^{(0)} = 1$ e $x^{(1)} = 2$)

$x^{(0)} = 1 \rightarrow f(x^{(0)}) = 0{,}37$

$x^{(1)} = 2 \rightarrow f(x^{(1)}) = -0{,}56$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{\left(\frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}}\right)} = 2 - \left(\frac{-0{,}56}{\left(\frac{-0{,}56 - 0{,}37}{2 - 1}\right)}\right) = 2 + \frac{0{,}56}{0{,}93} = 1{,}40$$

$x^{(2)} = 1{,}40 \rightarrow f(x^{(2)}) = -0{,}090$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{\left(\frac{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}{x^{(2)} - x^{(1)}}\right)} = 1{,}40 - \left(\frac{-0{,}090}{\left(\frac{-0{,}090 - (-0{,}56)}{1{,}40 - 2}\right)}\right) = 1{,}08$$

$x^{(3)} = 1{,}08 \rightarrow f(x^{(3)}) = 0{,}26$ (...)

16) a) V
b) V
c) F, pois det(A) = det(L) . det(U)
d) F, pois det(PA) = det(L) . det(U)
e) V
f) F, pois A precisa satisfazer a condição dos menores principais
g) V