Lista de Exercícios II

① Considere um oscilador harmônico amortecido, que obedece a equação diferencial

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega x = 0\,.$$

Esboce o gráfico da solução que satisfaz as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ nos casos de amortecimento crítico, sub-crítico e super-crítico. A solução nos três casos é transiente ou estacionária?

② Como vocês verão em Física III, um circuito RLC é descrito pela equação diferencial

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0\,,$$

onde $Q(t)$ é a carga acumulada no capacitor, R é a resistência do circuito, La indutância e C o valor da capacitância. Calcule a corrente $I(t)$ que circula no circuito, sabendo que $I(t) = \dot{Q}(t)$. Quanto valem a carga e a corrente supondo que $L = R^2C/4$?

③ Considere um oscilador harmônico amortecido de massa M e constante elástica k, sujeito a uma força externa $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$. No instante $t = 0$, o oscilador encontra-se parado na posição $x(0) = x_0$. Calcule $x(t)$.

④ Considere um sistema de duas barras de comprimento ℓ que formam um ângulo de 60° entre eles, suspenso pelo vértice O, de acordo com a figura **??**.

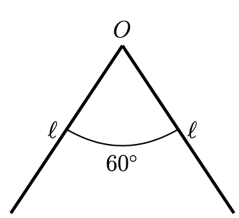

Figura 1: Sistema de duas barras de comprimento ℓ.

Considerando pequenas oscilações, calcule a frequência de oscilação. Escreva a Lagrangiana que descreve o sistema, e calcule as equações de movimento.

⑤ Considere um oscilador harmônico amortecido (com coeficiente de atrito γ e frequência própria ω_0) sujeito à força externa $F(t) = \sin(2\omega t)$, onde $\delta\omega \equiv \omega - \omega_0 \ll 1$. Escreva a solução aproximada da equação do movimento expandindo até a segunda ordem em $\delta\omega$.

⑥ O campo elétrico de uma onda eletromagnética em um ponto pode sempre ser descrito como

$$E_x(t) = A\cos(\omega t), \quad E_y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

Eliminando t da equação acima, verifique que em geral o movimento resultante do campo elétrico é uma elipse no plano (x, y). Estude em detalhe o que acontece quando $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi/2$. O que aconteceria se considerássemos frequências diferentes?

⑦ Considere um corpo de massa m, conectado a uma mola de constante elástica k, sujeito a uma força $F(t) = \alpha t$. A quantidade α é uma constante positiva com as dimensões apropriadas, e o comprimento de repouso da mola pode ser considerado desprezível. No instante $t = 0$ o corpo encontra-se na posição x_0 com uma velocidade v_0. Calcule a solução da equação de movimento impondo as condições iniciais dadas. Preste atenção: que tipo de solução particular você deve escolher nesse caso? O que mudaria considerando um comprimento de repouso da mola ℓ não desprezível?

⑧ Considere o seguinte sistema,

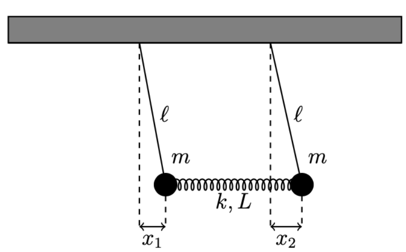

Figura 2: Pêndulos acoplados.

composto por dois pêndulos simples idênticos de comprimento ℓ, acoplados por uma mola de constante elástica k e comprimento de repouso L. Para permitir uma abordagem analítica ao problema, vamos considerar apenas *pequenas oscilações entorno das posições de equilíbrio do dois pêndulos, desprezando o movimento vertical das massas.*

(a) Escreva as equações de movimento dos dois corpos;

(b) Resolva as equações de movimento do item (a) para condições iniciais genéricas;

(c) Fixe agora as condições iniciais $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$ e esboce o gráfico da solução.

⑨ Considere um sistema de 3 corpos iguais, de massa m, conectados por 2 molas de constante elástica k e comprimento de repouso desprezível. Escreva as equações de movimento do sistema e ache os modos normais de oscilação.

⑩ Um modelo simples de barra elástica (ou de corda) de seção transversal S é dado por uma série de N osciladores harmônicos conectados por $N - 1$ molas, no limite $N \to \infty$. Cada corpo pode ser identificado por um índice i, com $i = 1, ..., N$. Para tomar o limite $N \to \infty$, podemos considerar o seguinte sistema

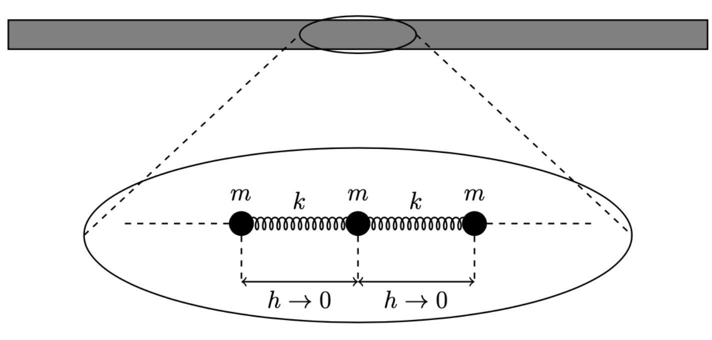

Figura 3: Modelo simples para uma corda.

ou seja considerar o sistema de osciladores no limite $h \to 0$. Em termos da densidade ρ da barra, a massa de cada um dos osciladores pode ser escrita como $m = \rho S h$, enquanto a constante elástica pode ser escrita em termos do chamado módulo de Young E como $k = ES/h$, onde E em primeira aproximação só depende do material da barra.

(a) Escreva a equação de movimento do corpo i em termos do deslocamento com respeito à posição de equilíbrio, $u_i(t) \equiv x_i(t) - h$;

(b) Usando as expressões para a massa e a constante elástica dadas acima, calcule o limite $h \to 0$ para a força que o corpo i sente. (Sugestão: para tomar corretamente o limite, é útil escrever $u_{i+1} = u(x_i + h, t)$ e expandir em série de Taylor até a ordem apropriada entorno de x_i.) A equação obtida é a equação de onda em uma dimensão, que vocês estudarão no próximo módulo da disciplina.