Aplicação a problemas de Mecânica

- Movimento de Projéteis (2a Lei de Newton).
  - 1D e 2D
  - Efeitos como resistência do ar, etc.

- Movimentos Oscilatórios
  - Oscilador Harmônico
  - Pêndulo Simples e Pêndulo Duplo
  - Sistemas Caóticos

Mecânica: 2a Lei de Newton

2a Lei de Newton

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R}$$

$\vec{p} = m\vec{v}$ - momento de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$

$\vec{F}_R$ - Resultante das forças que atuam sobre a partícula.

A força resultante pode:

- Ser **constante** (ou nula)
  - Força peso, atrito,...
- Variar com a **posição**.
  - Oscilador harmônico,
  - Força gravitacional,
  - Força elétrica
  - (...)
- Variar com a **velocidade**
  - Arrasto, viscosidade, etc.
- Ser **dependente do tempo**
  - Oscilador forçado.
  - Elétron em um campo alternado.

Mecânica: Força constante

<u>Exemplo 1:</u> Força **constante** na direção x: $\vec{F}_R = F\ \mathbf{i}$

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F = \text{const.}}$$

Solução analítica:

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{F}{m}\, dt \Rightarrow v(t) - v(0) = \frac{F}{m}\, t$$

$$\boxed{v(t) = v(0) + \frac{F}{m}\, t}$$

Cresce **linearmente** com o tempo!

Solução numérica: método de Euler

Solução aproximada de: $\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}}$

Método de Euler: $\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$

Ou seja:

$$\boxed{v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{F}{m}\Delta t}$$

Solução numérica: método de Euler

Método de Euler: $$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{F}{m}\Delta t$$

$$\boxed{t_n = n\,\Delta t} \qquad \boxed{v(t) \approx v(t_n)}$$

Discretização!

Tempo e velocidade são dado em intervalos *discretos*!

Fórmula recursiva: $$\boxed{v(t_{n+1}) = v(t_n) + \frac{F}{m}\Delta t}$$

- Começando em t=0 [dado v(0)] podemos calcular $v(t_1)$.
- Temos $v(t_1)$, calculamos $v(t_2)$. Temos $v(t_2)$, calculamos $v(t_3)$...

... e assim por diante até $v(t_n=n\Delta t)$!

Aula 5 – Tarefa 1

Um corpo de massa m=0,1 kg está sujeito a uma força constante de 1N partindo do repouso em t=0 s.

- *Calcule sua velocidade v(t) nos tempos $t_n=n.\Delta t$ de $t_1=0$ até $t_N=5s$ com passo de* ***Δt=0.5s*** *usando:*

  1) A fórmula iterativa do método de Euler. $v(t_{n+1})=v(t_n)+(F/m)\Delta t$

  2) A expressão exata: $v^E(t_n)=v(0)+(F/m)t_n$

- *Para cada passo, imprima t_n ,$v(t_n)$ e $v^E(t_n)$ com 5 casas.*
- *Faça um gráfico de $v(t_n)$ (use o símbolo '-o') e $v^E(t_n)$ versus t_n*
- *Mude o passo. O que você conclui?*

Dica 1 : Calcule $v(t_{n+1})$ *e* $v^E(t_{n+1})$ dentro do <u>mesmo</u> loop, que vai de 1 até (N-1) onde N é o tamanho dos arrays (t, v, v^E).

Dica 2 : Lembre de fprintf que vimos nas aulas anteriores.

Mecânica: Adicionando a força de arrasto

Exemplo 2: A força de arrasto de um objeto em um fluido
é uma força que **depende da velocidade** :

$$F_{\mathrm{drag}} = -Bv^2$$ onde: $$\boxed{B = \frac{1}{2}C\rho A}$$

C - coeficiente de arrasto

ρ - densidade do fluido

A - área frontal do objeto

Unidade de B: kg/m (mostre!!)

2a Lei de Newton: força constante + arrasto:

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = F - Bv^2}$$

Solução numérica: método de Euler

Solução aproximada de: $\boxed{m\frac{dv}{dt} = F - Bv^2}$

Método de Euler: $$\frac{dv(t)}{dt} \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Ou seja:

$$\boxed{v(t+\Delta t) = v(t) + \left(\frac{F}{m} - \frac{B}{m}(v(t))^2\right)\Delta t}$$

Solução numérica: método de Euler

Método de Euler: $$\boxed{v(t+\Delta t) = v(t) + \left(\frac{F}{m} - \frac{B}{m}(v(t))^2\right)\Delta t}$$

$$\boxed{t_n = n\,\Delta t} \qquad \boxed{v(t) \approx v(t_n)}$$

Discretização!

Tempo e velocidade são dado em intervalos *discretos*!

Fórmula recursiva: $$\boxed{v(t_{n+1}) = v(t_n) + \left(\frac{F}{m} - \frac{B}{m}(v(t_n))^2\right)\Delta t}$$

- Começando em t=0 [dado v(0)] podemos calcular $v(t_1)$.
- Temos $v(t_1)$, calculamos $v(t_2)$. Temos $v(t_2)$, calculamos $v(t_3)$...

... e assim por diante até $v(t_n=n\Delta t)$!

Aula 5 - Tarefa 2

Um corpo de massa m=0,1 kg inicialmente em repouso está sujeito a uma força constante de 1N e uma força de arrasto $-B\, v^2$.

- *Calcule sua velocidade $v(t)$ nos tempos $t_n=n.\Delta t$ de $t_1=0$ até $t_N=5s$ com passo de **$\Delta t=0.1s$** usando o método de Euler para*
  - *B=0 , 0.005 , 0.01 e 0.05 kg/m*
- *Plote no <u>mesmo gráfico</u> as 4 curvas $v(t_n)$ vs tn.*
- *Qual é a "velocidade terminal" em cada caso?*

Dica 1 : Defina um vetor Bvec=[0 0.005 0.01 0.05] e faça um loop:

for B=Bvec (...) end

Dentro deste loop, plote a curva usando plot() e hold on;

Dica 2: Para plotar curvas com cores diferentes: use **'color',rand(1,3)** dentro de plot().