Suplemento sobre Forças Conservativas e Energia Potencial

Prof. J.R.B. Oliveira, IFUSP (versão 2023)

Suponha que uma partícula material esteja submetida a uma força que depende exclusivamente da posição (*x*, *y*, *z*) da partícula (uma força dita *local*) com relação a um determinado sistema de coordenadas: $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x,y,z)$, onde $\vec{r}=(x,y,z)=x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+z\,\hat{z}$ é o vetor posição da partícula neste sistema (um exemplo seria a força gravitacional do Sol sobre uma partícula de poeira cósmica).

O trabalho da força sobre a partícula ao longo de uma determinada trajetória que liga um ponto *a* a um ponto *b*, no espaço, é dado pela Integral de Linha (Fig. 1) dessa força, ao longo do caminho de *a* para *b*:

$$W_{ab}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} \quad (1)$$

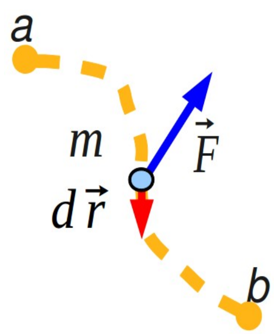

*Figura 1 - Integral de linha de uma força **F** de **a** para **b***

Expandindo-se o produto escalar entre a força e o deslocamento, $\vec{F}.\vec{r}=F_x dx+F_y dy+F_z dz$, na equação 1 acima, percebe-se que a Eq. 1 é na verdade uma fórmula sintética equivalente a três integrais de uma dimensão:

$$W_{ab}=\int_a^b F_x(x,y,z)dx+\int_a^b F_y(x,y,z)dy+\int_a^b F_z(x,y,z)\,dz$$

no entanto, observe que cada componente da força depende, em princípio, das 3 coordenadas, *x*, *y*, e *z*, que estão vinculadas pela trajetória.

Se a força é local (isto é, dependente somente de $\vec{r}$), o trabalho é *reversível*: $W_{ab}=-W_{ba}$, como se pode perceber simplesmente invertendo os limites de integração.

Em geral, o valor desse trabalho pode depender do caminho, isto é $W_{ab}[C_1]\neq W_{ab}[C_2]$ (Fig. 2).

Diz-se que uma força é **conservativa** se:

- O trabalho é independente do caminho, qualquer que seja o caminho entre dois pontos *a* e *b* arbitrários (isto é, $W_{ab}[C_1]=W_{ab}[C_2]$, figura 2), **ou** (o que é equivalente):
- O trabalho por uma curva fechada qualquer é sempre nulo $(W_{ab}[C_1]+W_{ba}[C_2]=0)$. Neste caso, representa-se a integral de linha pela curva fechada com um círculo sobre o sinal de integração: $\oint \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$.

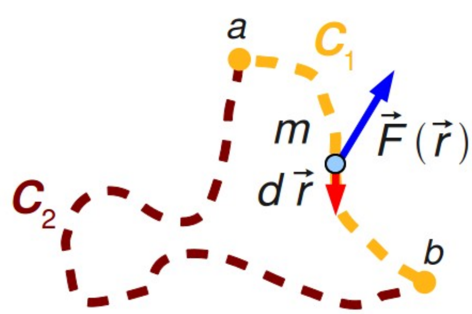

*Figura 2 - Dois possíveis caminhos diferentes (C1 e C2) de **a** para **b**.*

Caso contrário a força é dita *não-conservativa* (um exemplo é a força de atrito (entre superfícies sólidas ou sólidas se movendo em fluidos etc., cujo trabalho obviamente depende do caminho, além de não ser uma força local, pois depende da velocidade relativa entre as superfícies em contato, e não da posição – é uma força "não-local"). Se a força é conservativa, é possível definir uma Função Potencial $U(\vec{r})$ (ou *energia potencial*, que depende *somente* da posição $\vec{r}$) como sendo *menos* (–) o trabalho realizado pela força a partir de um ponto de referência arbitrário (mas escolhido convenientemente) $\vec{r}_{ref}$ até o ponto $\vec{r}=(x,y,z)$:

$$U(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}}\vec{F}(\vec{r}\,').d\vec{r}\,' \quad (2)$$

Neste caso, o trabalho realizado entre os pontos *a* e *b* (correspondente à integral de linha da força) pode ser calculado a partir da diferença de potencial:

$$W_{ab}=-\Delta U_{ab}=-(U_b-U_a)=U(\vec{r}_a)-U(\vec{r}_b) \quad (3)$$

A equação 2 permite determinar a função potencial $U(x,y,z)$ a partir da força (se for conservativa) caso a expressão para $\vec{F}(x,y,z)$ seja conhecida. Para isto, basta escolher um caminho qualquer (conveniente, para facilitar o cálculo da integral de linha) entre o ponto de referência $\vec{r}_{ref}$ (para o qual U = 0) e o ponto $\vec{r}=(x,y,z)$. Inversamente, se a expressão para $U(x,y,z)$ é conhecida, pode-se obter a expressão para a força a partir do *gradiente* do potencial:

$$\vec{F}(x,y,z)=-\vec{\nabla}U(x,y,z)=-(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}) \quad (4)$$

Sempre que for possível definir uma função potencial, a força correspondente será necessariamente conservativa, já que o trabalho não dependerá do caminho, mas somente da diferença de energia potencial entre os pontos extremos (*a* e *b*), pela Eq. 3.

Exemplos:

1- O exemplo mais trivial de força conservativa é o caso de uma força $\vec{F}(x,y,z)=-P\hat{y}$, onde *P* é uma constante (independente de *x*, *y*, *z*). Este é o caso da força gravitacional na superfície da Terra, sendo $\hat{y}$ a direção vertical e $F_y=-P=-mg$. Tomando a origem do sistema de coordenadas (0,0,0) como ponto de referência, podemos calcular a integral de linha da Eq. 2 do ponto (0,0,0) até o ponto (*x*,*y*,*z*) por um caminho, por exemplo, retilíneo (na verdade por qualquer caminho) que vai de um ponto ao outro, obtendo:

$$U(x,y,z)=-\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec{F}.d\vec{r}=-\int_0^y(-P)dy'=P\int_0^y dy'=Py$$

Se $P=mg$ reproduz-se o familiar potencial gravitacional $U_g(y)=mgy$. Como *P* é uma constante e somente a componente *y* contribui, este potencial claramente independe do caminho. O gradiente do potencial, neste caso, se reduz à derivada com relação a *y*: $\vec{\nabla}U=\frac{dU}{dy}\hat{y}=P\hat{y}$, isto é, $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=-P\hat{y}$ o que confirma o resultado conforme a Eq. 4.

2- Outro exemplo simples é o da força elástica de uma mola alinhada na direção $\hat{x}$: $\vec{F}=-kx\hat{x}$, do qual se deduz, de maneira semelhante ao exemplo anterior, que $U_e(x)=\frac{1}{2}kx^2$ (verifique).

3- Um exemplo de força local não conservativa em duas dimensões seria: $\vec{F}=\alpha y\hat{x}-\alpha x\hat{y}$, onde α é uma constante não nula. A integral de linha pelo caminho retangular *abcd* da figura 3, por exemplo, não é nula, como pode-se verificar com facilidade:

- No trecho *ab*, como *y* = 0, $\vec{F}=-\alpha x\hat{y}$, enquanto cada passo infinitesimal é $d\vec{r}=dx\,\hat{x}$ (porque $dy=0$), então $\vec{F}.d\vec{r}=0$ e $W_{ab}=0$.

- No trecho *bc*, $d\vec{r}=dy\,\hat{y}$, e $W_{bc}=\int_b^c(-\alpha x_b)dy=-\alpha x_b\int_{y_b}^{y_c}dy=-\alpha x_b(y_c-y_b)=-\alpha x_b y_c$ (pois $y_b=0$).
- Analogamente, no trecho *cd* $W_{cd}=\alpha y_c(x_d-x_c)=-\alpha x_c y_c$ que é igual ao anterior pois $x_b=x_c$.
- No trecho *da*, *x* = 0 e $d\vec{r}=dy\,\hat{y}$ e novamente o trabalho é nulo $W_{da}=0$.

O trabalho total pelo caminho *abcd* é a soma dos 4 trabalhos anteriores: $W_{abcd}=W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da}=-2\alpha x_c y_c\neq 0$. Não se trata, portanto, de uma força conservativa.

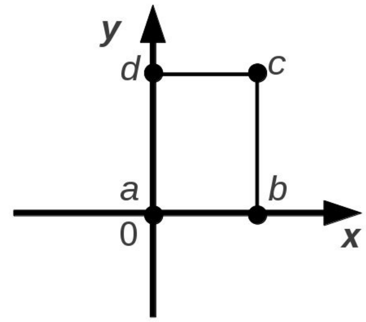

Figura 3 - Caminho retangular ***abcd*** *no plano* ***xy***

Exercícios:

1) Calcule o trabalho da força do exemplo anterior de *a* para *c* por um caminho retilíneo ligando diretamente o ponto *a* ao ponto *c* da figura 3. Dica: obtenha uma relação linear para $y(x)$ ao longo desse caminho e substitua na equação da força.
Resp.: $W_{ac}=0$.

2) Obtenha uma função potencial $U(x,y)$ para a força conservativa dada por $\vec{F}=\alpha y\hat{x}+\alpha x\hat{y}$. Dica: escolha um caminho do ponto de referência (0,0) ao ponto (*x*,*y*) semelhante ao caminho de trechos retilíneos *ab* e *bc* da figura 3. Utilize variáveis *x'* e *y'* nas integrais para não confundi-las com os limites de integração.
Resp.: $U(x,y)=\alpha x\,y$.

3) Verifique se o potencial obtido no exercício anterior confere com o esperado de acordo com a equação 4, confirmando o caráter conservativo da força.

4) Determine a força correspondente a uma função potencial dada por: $U(x,y,z)=\alpha e^{-\beta x}y\cos(\gamma z^2)$, onde α,β,γ são constantes positivas.
Resp.: $\vec{F}=\alpha\beta e^{-\beta x}y\cos(\gamma z^2)\hat{x}-\alpha e^{-\beta x}\cos(\gamma z^2)\hat{y}+2\alpha\gamma e^{-\beta x}y\,z\,sen(\gamma z^2)\hat{z}$.