MAP 3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Método dos Mínimos Quadrados
Exemplos não-lineares - Aula IV

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

Note que o MMQ estudado é **linear** nos parâmetros $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Dado $f \in F$[a] encontramos $g \in G = [g_0, \ldots, g_m]$ tal que

$$g = \sum_{i=0}^{m} a_i g_i \quad \text{e}$$

$$E(f, g) = \langle f - g, f - g \rangle \qquad \text{seja } \textbf{mínimo}.$$

[a] F um **espaço vetorial** com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Sistema Normal

Vimos que $f - g$ é ortogonal a G e $g = a_0 g_0 + \ldots + a_m g_m$ **satisfaz**

$$\begin{pmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \cdots & \langle g_0, g_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_m, g_0 \rangle & \cdots & \langle g_m, g_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0, f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_m, f \rangle \end{pmatrix}.$$

Algumas vezes podemos **adaptá-lo** ao procurarmos aproximações não lineares por meio de **linearizações**.

Exemplo 1.

Seja f uma função dada e suponha que a queremos **aproximar** por $a_0 e^{a_1 x}$ que é não linear nos **parâmetros** a_0 e a_1.

Linearizamos o problema usando a função logarítmica ln.

- **Aproximamos** $F(x) = \ln f(x)$ por

$$\ln a_0 e^{a_1 x} = \ln a_0 + a_1 x = b_0 + b_1 x$$

com $b_0 = \ln a_0$ e $b_1 = a_1$.

Assim b_0 e b_1 serão os valores que minimizarão o seguinte **erro quadrático**:

$$E\left(b_0, b_1\right) = \int_{x_I}^{x_F} \left|\ln f(x) - (b_0 + b_1 x)\right|^2 dx.$$

Nesse caso podemos **aplicar** o MMQ contínuo para $F(x) = \ln f(x)$ com

$$\langle f, g \rangle = \int_{x_I}^{x_F} f(x)\, g(x)\, dx, \qquad g_0(x) = 1 \text{ e } g_1(x) = x.$$

Assim $G(x) = b_0 g_0 + b_1 g_1$ **satisfaz**

$$\begin{pmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \langle g_0, g_1 \rangle \\ \langle g_1, g_0 \rangle & \langle g_1, g_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0, F \rangle \\ \langle g_1, F \rangle \end{pmatrix}.$$

Da **relação** $a_0 = e^{b_0}$ e $a_1 = b_1$ propomos uma aproximação $a_0 e^{a_1 x}$ para $f(x)$.

Observamos que a aproximação obtida neste exemplo **não** é a aproximação por mínimos quadrados para o problema **original**.

Exemplo 2.

Suponha agora que **queremos** aproximar f por uma função

$$g(x) = \frac{c_1 + c_2 x + c_3 x^2}{1 + c_4 x + c_5 x^2}.$$

Note que

- g é **não** linear nos parâmetros c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5.
- Aproximar f por g é **equivalente** a aproximar

$$(1 + c_4 x + c_5 x^2) f(x) \quad \text{por} \quad c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

  que é equivalente a **aproximar**

$$f(x) \quad \text{por} \quad \hat{g}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 - c_4 x f(x) - c_5 x^2 f(x).$$

- Daí buscamos $\hat{g}$ como **combinação linear** de

$$\hat{g}_1(x) = 1,\ \hat{g}_2(x) = x,\ \hat{g}_3(x) = x^2,\ \hat{g}_4(x) = -x f(x) \ \text{ e } \ \hat{g}_5(x) = -x^2 f(x).$$

- Uma vez que **achamos** c_1, ..., c_5 usamos a aproximação

$$g(x) = \frac{c_1 + c_2 x + c_3 x^2}{1 + c_4 x + c_5 x^2} \quad \text{para} \quad f(x).$$

Exemplo 3.

Mediu-se o valor **aproximado** de uma função f obtendo-se os seguintes valores:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	2	8	4	1

Sabe-se que f é da forma $\alpha 2^{\beta(x-\gamma)^2}$.

- Estime α, β e γ por **mínimos quadrados**.

Inicialmente obtemos uma **linearização**:

$$F(x) = \ln f(x) \approx \ln \alpha 2^{\beta(x-\gamma)^2} = \ln \alpha + \beta(x-\gamma)^2 \ln 2$$
$$= \left[\ln \alpha + (\ln 2)\beta\gamma^2\right] + \left[-2\beta\gamma(\ln 2)\right] x + \left[\beta(\ln 2)\right] x^2 = a + bx + cx^2.$$

Assim tomamos:

- $F = (\ln 1, \ln 2, \ln 8, \ln 4, \ln 1)$;
- G como o **subespaço** gerado por $\{g_0, g_1, g_2\}$ dados por
$$g_0 = (1,1,1,1,1), \quad g_1 = (-2,-1,0,1,2) \quad \text{e} \quad g_2 = (4,1,0,1,4).$$
- Como produto interno
$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{5} f_i g_i.$$

Como

$$g_0 = (1,1,1,1,1),\ \ g_1 = (-2,-1,0,1,2) \text{ e } g_2 = (4,1,0,1,4)$$

temos que **resolver** o sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.16 \\ 0.7 \\ 2.08 \end{pmatrix}$$

já que

$$\langle (1,1,1,1,1),(1,1,1,1,1)\rangle = 5, \quad \langle (1,1,1,1,1),(-2,-1,0,1,2)\rangle = 0,$$
$$\langle (1,1,1,1,1),(4,1,0,1,4)\rangle = 10,$$
$$\langle (-2,-1,0,1,2),(-2,-1,0,1,2)\rangle = 10, \quad \langle (-2,-1,0,1,2),(4,1,0,1,4)\rangle = 0$$
$$\langle (4,1,0,1,4),(4,1,0,1,4)\rangle = 34$$
$$\langle (0,\ln 2,\ln 8,\ln 4,0),(1,1,1,1,1)\rangle = 4.16, \quad \langle (0,\ln 2,\ln 8,\ln 4,0),(-2,-1,0,1,2)\rangle = 0.7$$
$$\text{e} \quad \langle (0,\ln 2,\ln 8,\ln 4,0),(4,1,0,1,4)\rangle = 2.08.$$

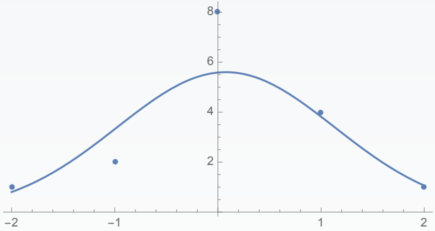
Não é **difícil** ver que:

$$a = 1.72, \quad b = 0.07 \quad \text{e} \quad c = -0.45$$

o que **nos dá**

$$\beta = c/\ln 2 = -0.65, \quad \gamma = -b/(2\beta \ln 2) = 0.08 \quad \text{e} \quad \alpha = \exp\left(a - \beta\gamma^2(\ln 2)\right) = 5,6.$$

Em azul temos o **gráfico** da aproximação:



Lembre-se de que

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	2	8	4	1