MAP 3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

Método dos Mínimos Quadrados
Caso contínuo - Aula III

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

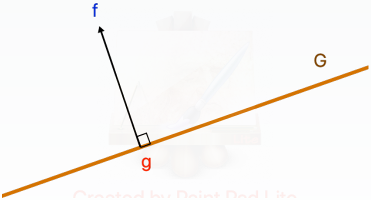
Seja F um espaço vetorial com **produto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e G um subespaço de **dimensão finita** gerada pelos vetores g_0, ..., g_m.

Problema

Para $f \in F$ dado **determine** o vetor $g \in G$ tal que o **erro** quadrático

$$E(f,g) = \langle f-g, f-g \rangle$$

seja o **menor** possível.



O vetor g **será** tal que $f-g$ é **ortogonal** a G.

Seja F um espaço vetorial com **produto interno** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e G um subespaço de **dimensão finita** gerada pelos vetores g_0, ..., g_m.

Problema

Para $f \in F$ dado **determine** o vetor $g \in G$ tal que o **erro** quadrático

$$E(f,g) = \langle f-g, f-g \rangle$$

seja o **menor** possível.

Solução (Sistema Normal)

Vimos que $f - g$ é ortogonal a G quando $g = a_0 g_0 + \ldots + a_m g_m$ **satisfaz**

$$\begin{pmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \ldots & \langle g_0, g_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_m, g_0 \rangle & \ldots & \langle g_m, g_m \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_0, f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_m, f \rangle \end{pmatrix}.$$

Mínimos quadrados contínuo

- A **diferença** com o caso discreto é que agora conhecemos uma forma **analítica** para $f(x)$.
- Vamos aproximar f num intervalo **fechado** $[x_I, x_F]$.

Erro quadrático

No caso discreto o erro quadrático é uma **soma**, no contínuo, uma **integral**:

$$E(a_0, \ldots, a_m) = \int_{x_I}^{x_F} (f(x) - g(x))^2 dx$$
$$= \int_{x_I}^{x_F} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m} a_k g_k(x)\right)^2 dx.$$

Trabalhamos com o **produto interno** do tipo integral

$$\langle w, z \rangle = \int_{x_I}^{x_F} w(x)z(x)\,dx$$

assumindo w e z em algum subespaço de dimensão **finita**.

Solução

Os **valores** de a_0, a_1, ..., a_m que minimizam o erro **satisfazem** o sistema

$$\begin{pmatrix} \int_{x_I}^{x_F} g_0(x)g_0(x)\,dx & \dots & \int_{x_I}^{x_F} g_0(x)g_m(x)\,dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{x_I}^{x_F} g_m(x)g_0(x)\,dx & \dots & \int_{x_I}^{x_F} g_m(x)g_m(x)\,dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \int_{x_I}^{x_F} g_0(x)f(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_{x_I}^{x_F} g_m(x)f(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.

Aproximar $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ por uma **reta**.

Nesse caso $g_0(x) = 1$ e $g_1(x) = x$. **Como**

$$\int_0^1 1\,dx = 1, \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$
$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 xe^x\,dx = e^x(x-1)\Big|_0^1 = 1$$

temos que resolver o seguinte **sistema**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuja **solução** é: $(a_0, a_1) = (4e - 10, 18 - 6e)$.

Exemplos

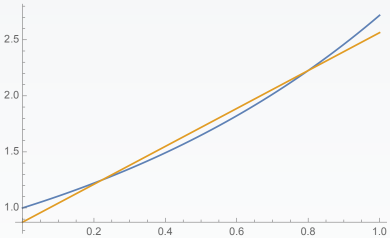


Figura: Gráfico das funções ○ e^x e ○ $4e - 10 + (18 - 6e)x$.

Exemplo 2.

Aproximar $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, 1]$ por uma **parábola**.

Nesse caso tomamos $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = x^2$. **Como**

$$\int_0^1 1\,dx = 1, \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}, \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 e^x\,dx = e - 1, \quad \int_0^1 xe^x\,dx = 1 \text{ e } \int_0^1 x^2e^x\,dx = x^2e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2$$

temos que resolver o seguinte **sistema**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{pmatrix}$$

cuja **solução** é: $(a_0, a_1, a_2) = (3(13e - 35), 12(49 - 18e), 30(7e - 19))$.

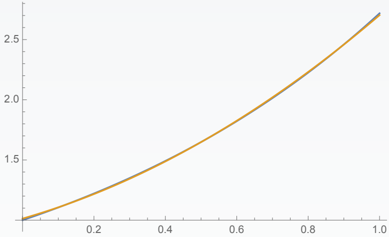


Figura: Gráfico das funções ○ e^x e ○ $3(13e - 35) + 12(49 - 18e)x + 30(7e - 19)x^2$.