Lista 9 - MAT-330 - 2023

(I) Seja $C[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua } \}$, com a relação $\leq$ definida por

$f \leq g \quad$ se $\quad f(x) \leq g(x), \forall\, x \in [0,1]$

(i) Mostre que $\leq$ é uma ordem parcial em $C[0,1]$, mas não total.

(ii) Prove que, dados $f, g \in C[0,1]$, existe $sup\{f,g\} \in C[0,1]$ e $inf\{f,g\} \in C[0,1]$.

$$\text{Sugestão: } \forall\, a,b \in \mathbb{R} \begin{cases} max\{a,b\} = \dfrac{(a+b)+|a+b|}{2} \\ \\ min\{a,b\} = \dfrac{(a+b)-|a-b|}{2} \end{cases}$$

(II) Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ a coleção de todos os subconjuntos não vazios de X.

Considere $\mathcal{C} = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R} : A \in \mathcal{A}\}$, com a seguinte relação:

$f \leq g \quad$ se $D_f \subseteq D_g$ e $g_{|D_f} = f$

(i) Prove que $\leq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{C}$. Verifique que $f \leq g \leftrightarrow f \subseteq g$.

(ii) Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ um sistema compatível de funções de $\mathcal{C}$, isto é:
dados $f, g \in \mathcal{F}$, existe $h \in \mathcal{C}$ tal que $f \leq h$ e $g \leq h$.
Mostre que $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup\{f : f \in \mathcal{F}\}$ é supremo de $\mathcal{F}$.

(III) Sejam $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ conjuntos ordenados. Considere $A = A_1 \times A_2$ e a relação $\leq$ definida por

$$(a_1, a_2) \leq (a_1', a_2') \quad \text{se} \quad \begin{cases} a_1 \leq a_1' \text{ e } a_1 \neq a_1' \\ \text{ou} \\ a_1 = a_1' \text{ e } a_2 \leq a_2' \end{cases}$$

(i) Prove que $\leq$ é uma ordem em A, chamada de ordem lexicográfica.

(ii) $\leq$ é uma ordem total $\leftrightarrow$ $\leq_1$ e $\leq_2$ forem ordens totais.

(III) Se A_1 e A_2 forem bem ordenados então A será bem ordenado.

(iv) Mostre que, com a ordem lexicográfica, os conjuntos $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \{0,1\}$ não são isomorfos.

(IV) Sejam $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ conjuntos ordenados, com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Considere $B = A_1 \cup A_2$ e, em B, relação $\leq$ da seguinte maneira:

$$x \leq y \quad \text{se} \quad \begin{cases} x, y \in A_1 \text{ e } x \leq_1 y \\ \text{ou} \\ x, y \in A_2 \text{ e } x \leq_2 y \\ \text{ou} \\ x \in A_1 \text{ e } y \in A_2 \end{cases}$$

Mostre que $(B, \leq)$ é ordenado. Se $\leq_1$ e $\leq_2$ forem boas ordens então $\leq$ também será uma boa ordem.