PEF 3307

Resistência dos Materiais

Valerio SA, valerio.almeida@usp.br

Abril/2021

Conteúdo da aula

- Introdução à resistência dos Materiais
- Cálculo de reações de apoio
- Cargas distribuídas
- Exemplos
- Conceito de tensão/esforço

MECÂNICA

Ciência aplicada, não tem o empirismo de algumas ciências da engenharia, nem é abstrata/pura

MECÂNICA

- CORPO RÍGIDO (espaço, veloc., aceler.)
- **CORPO DEFORMÁVEL (esforços internos, deformações)**
- FLUIDOS (veloc., pressões)

CORPO DEFORMÁVEL

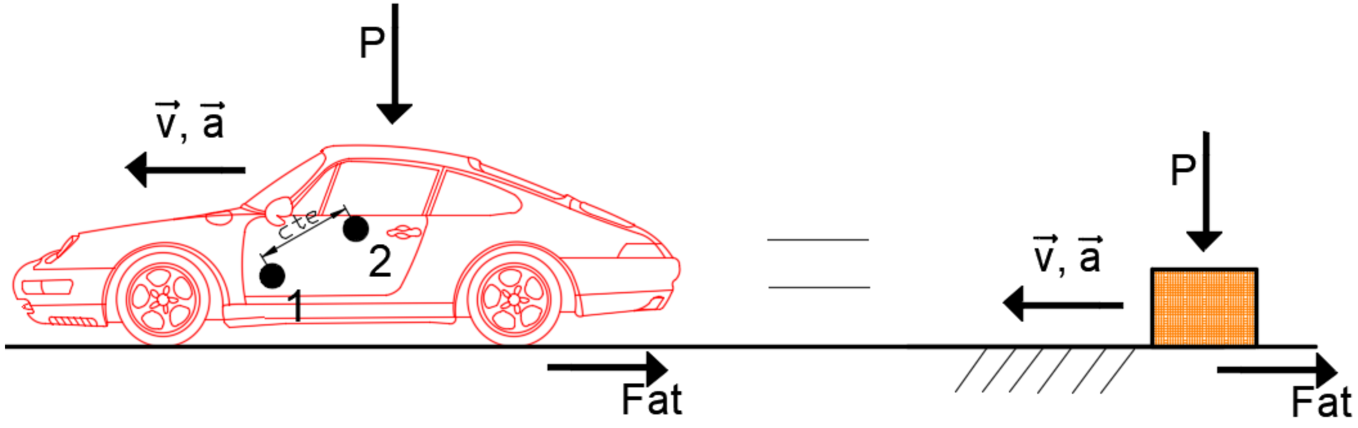
Grandezas físicas: tensões, deformações

Mecânica do Materiais

Estudo da Mecânica

- **Corpos rígidos**

Não há interesse em movimento relativo no corpo



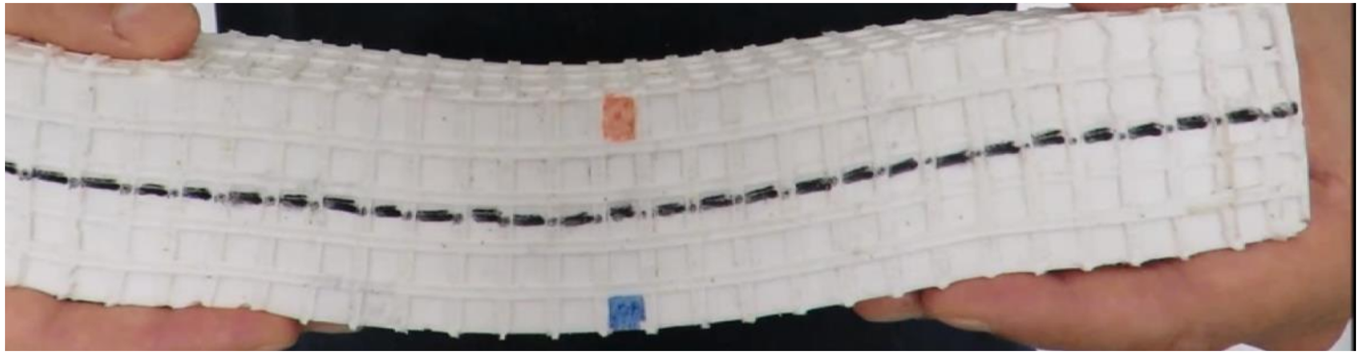
- **Corpos deformáveis**

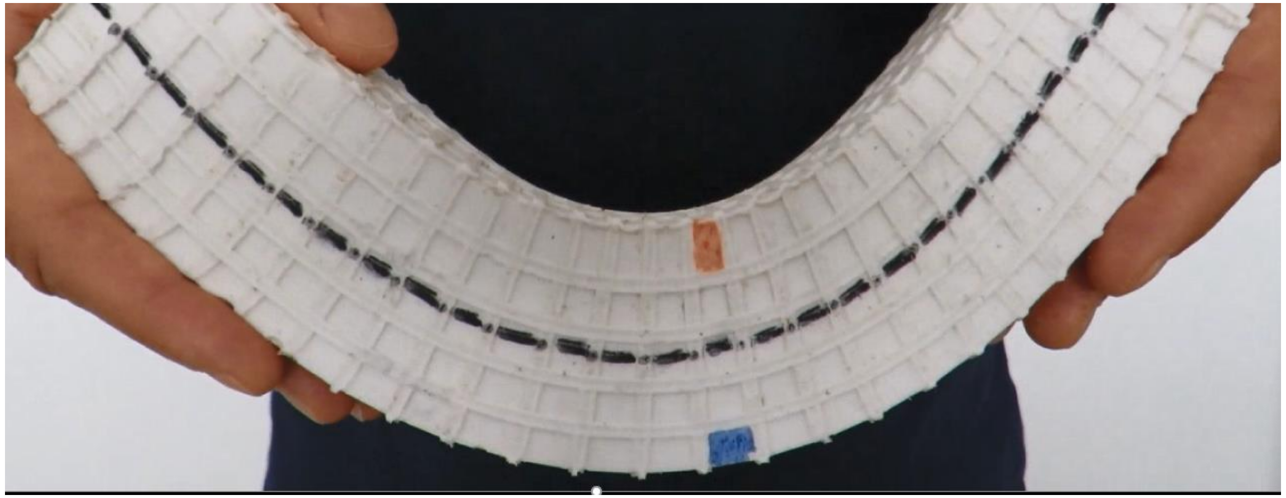
Grande interesse na mudança de forma do corpo

Mecânica do Materiais

- **Corpos deformáveis**

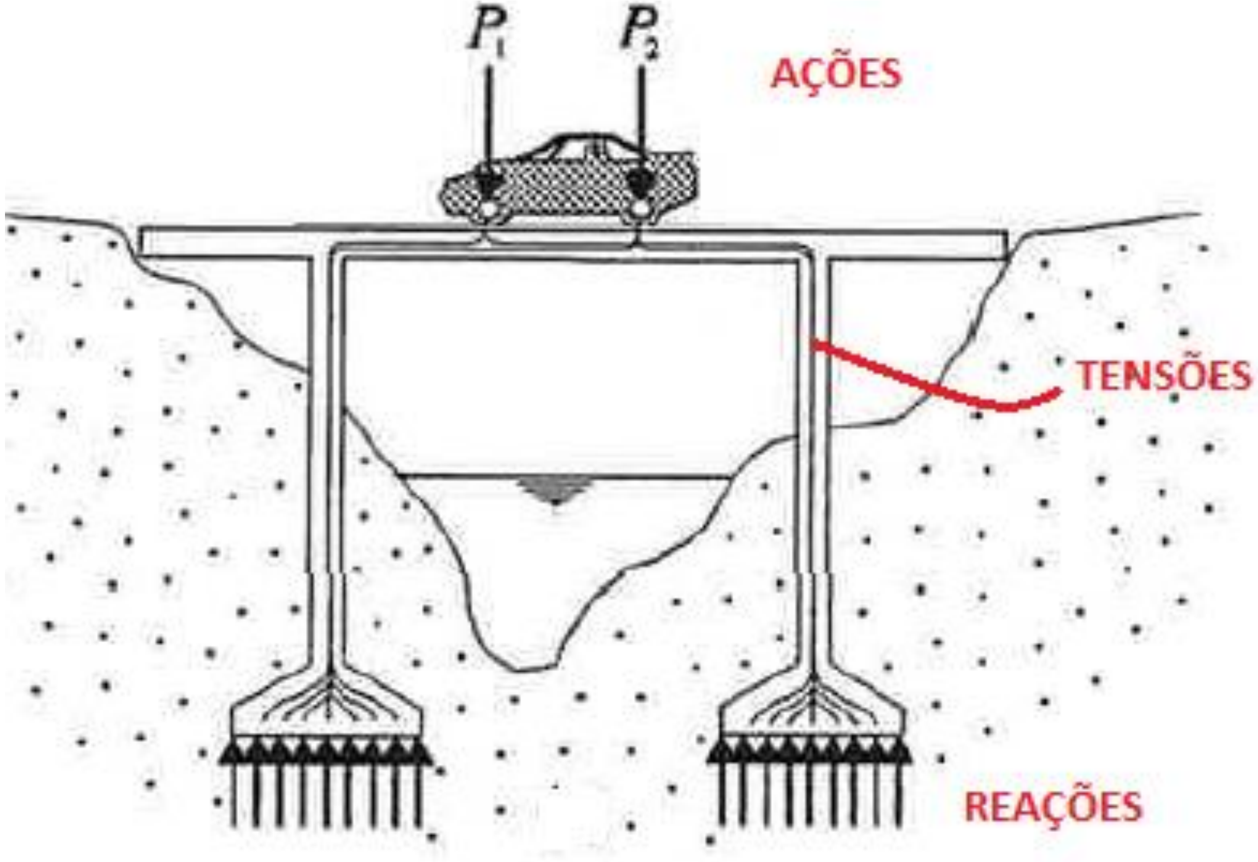
Grande interesse na mudança de forma do corpo: movimentação inter-atômica dos cristais.

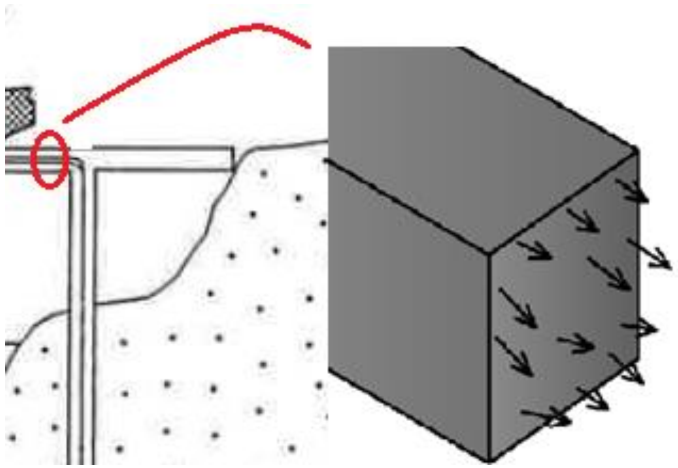




Mecânica do Materiais

Variação de sua forma: deformações
Forças dentro do corpo: esforço interno e tensões

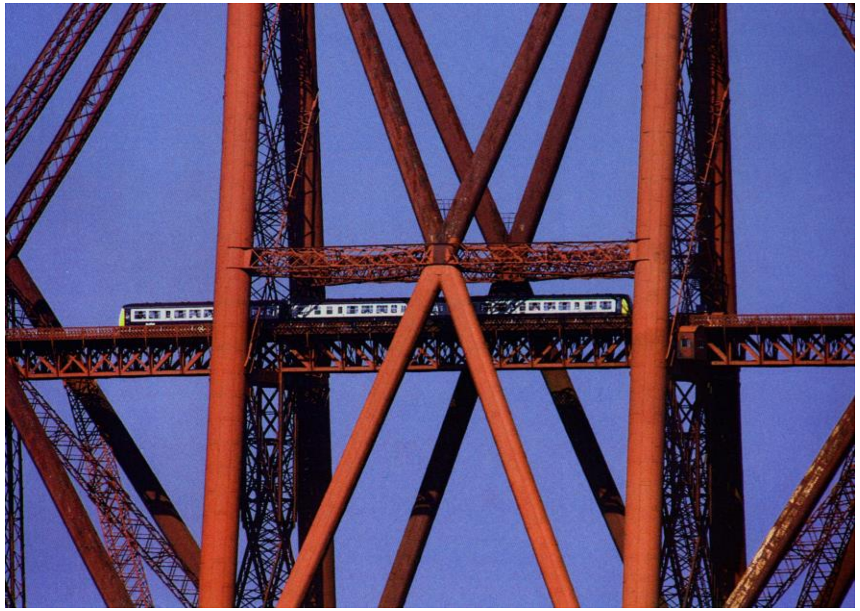


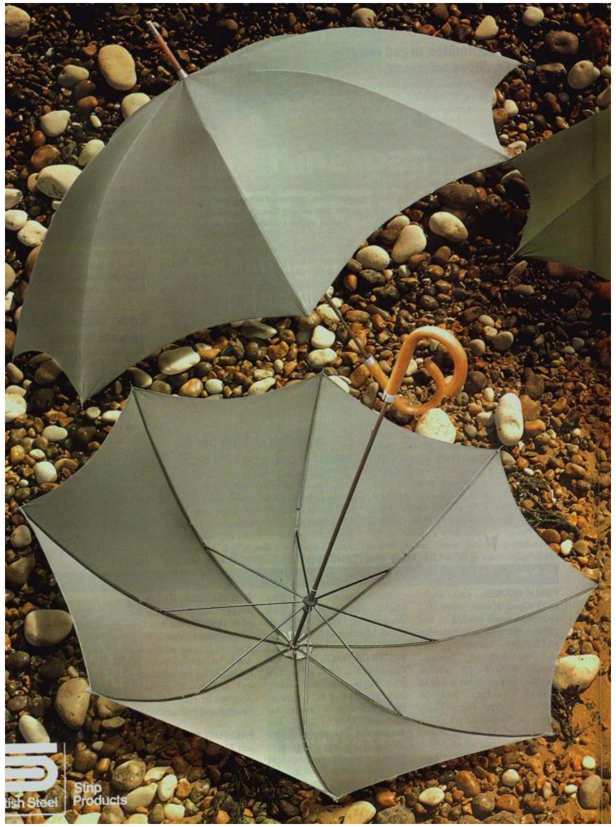


ESTRUTURAS

É o conjunto de partes resistentes de uma construção, de uma máquina, ponte, edifício etc...



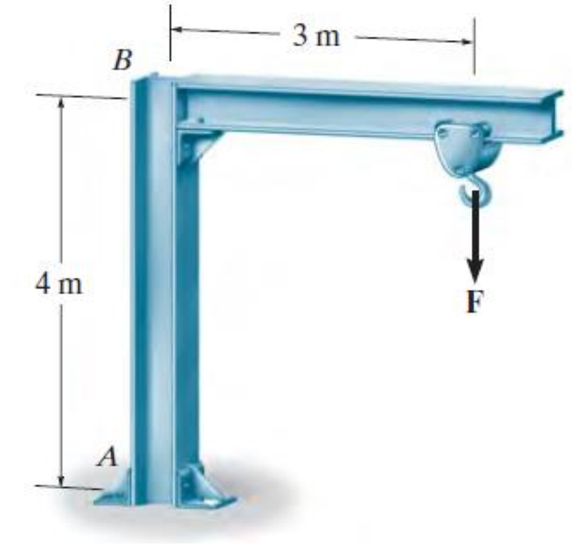


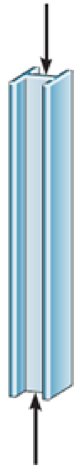


Strip Products


Brasil quer toda criança na escola.

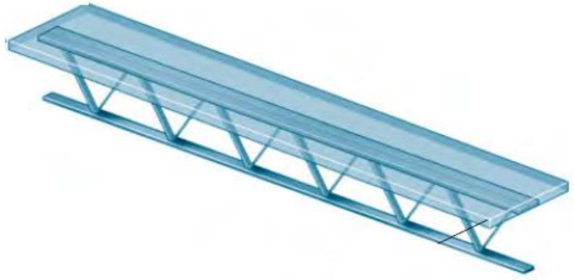
Classificação das estruturas quanto à sua forma

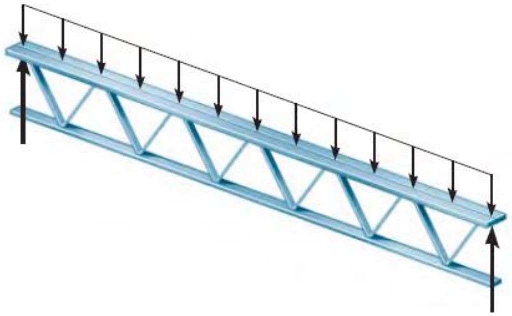
1) Planas: elementos que compõem a estrutura e os esforços que nela atuam se situam em um mesmo plano



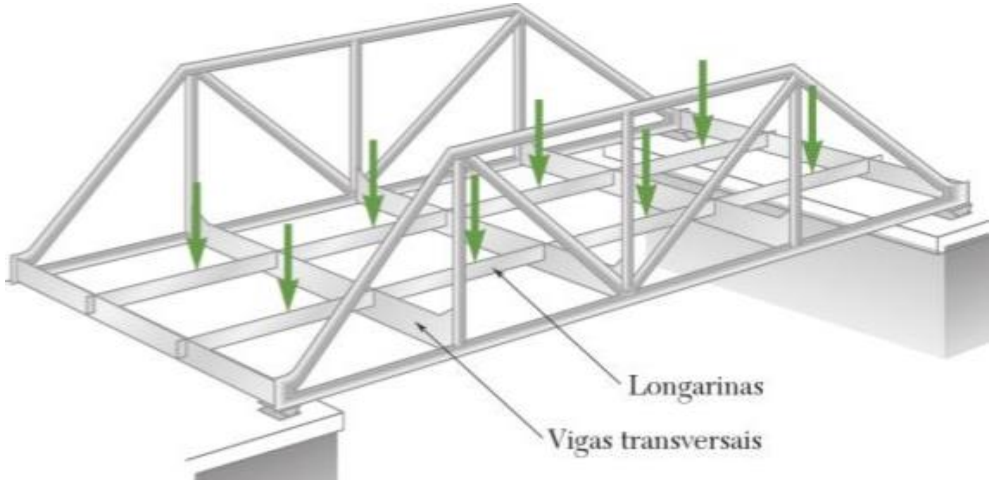


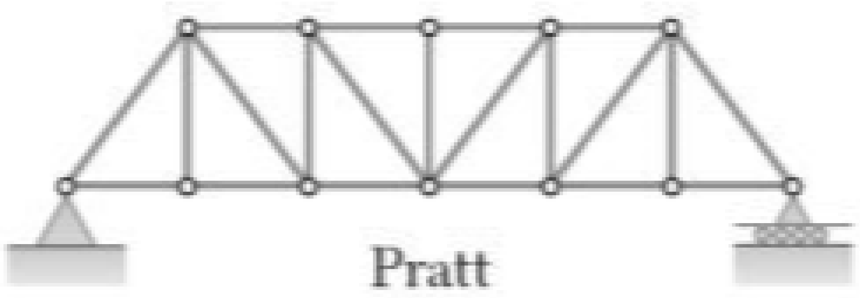
Pilar





Vigas

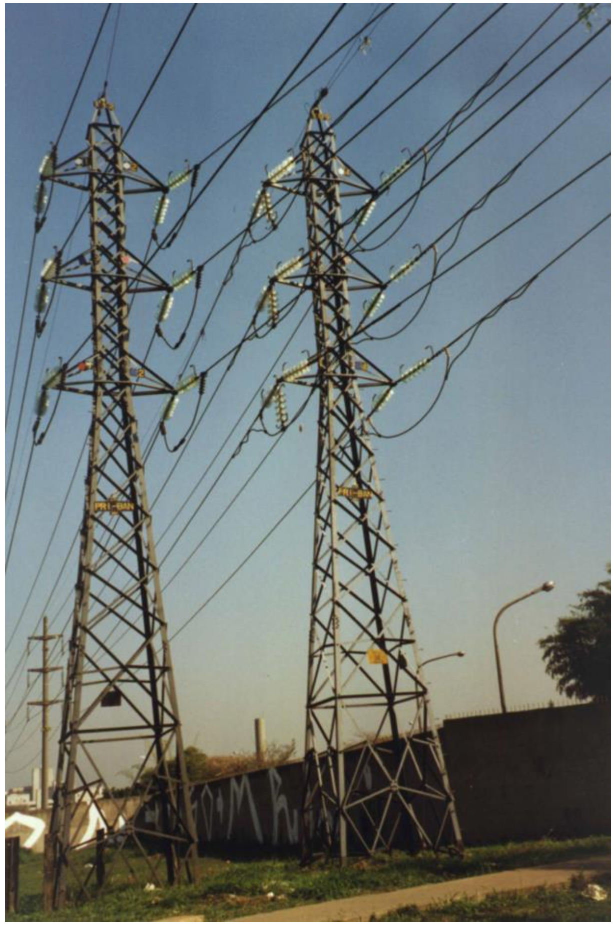


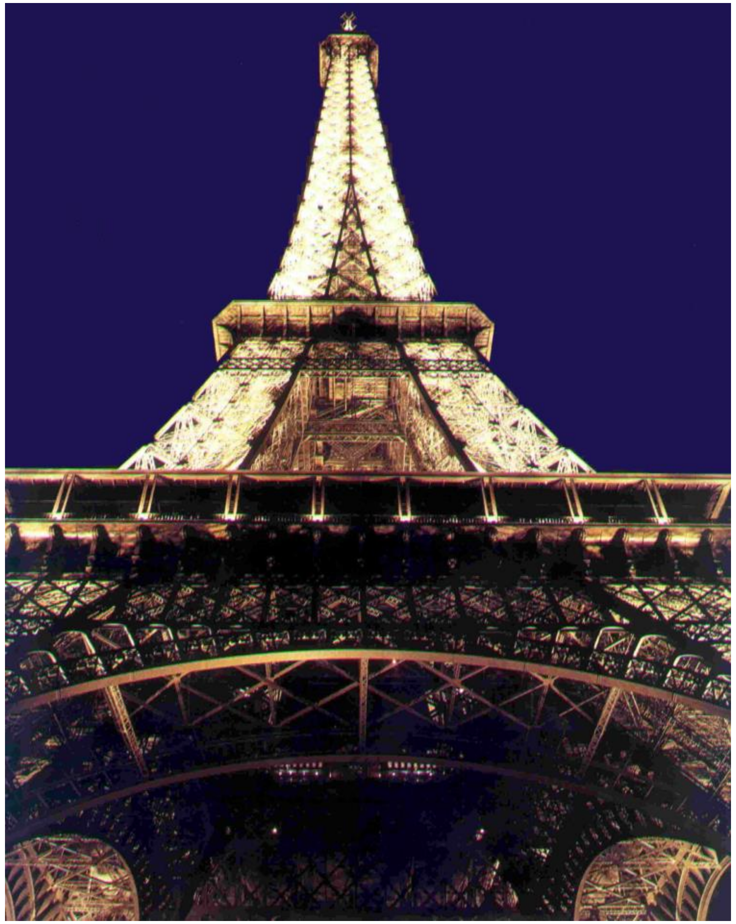


Treliças planas

Classificação das estruturas quanto à sua forma

2) Espaciais: os elementos que compõem a estrutura **OU** os esforços que nela atuam **NÃO** se situam em um mesmo plano



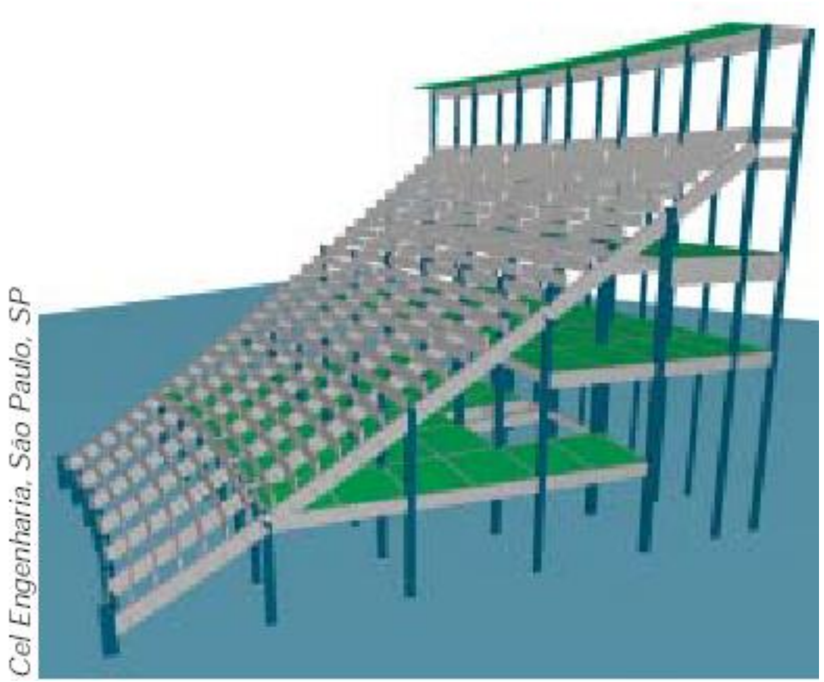


Torres de transmissão de energia elétrica, coberturas

Classificação dos elementos estruturais quanto à sua forma

1) Elementos lineares (barras):

Uma das dimensões é maior que as demais: vigas, pilares, cabos



Vigas, pilares, cabos, estacas

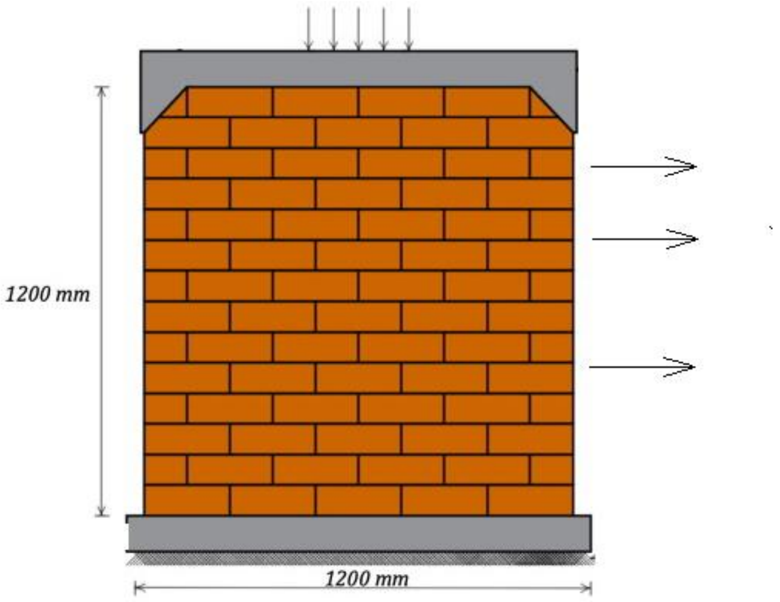
Classificação dos elementos estruturais quanto à sua forma

2) Superfície: elementos em que uma das dimensões (espessura, h) é bem menor que as demais dimensões (a) (h/a$\leq$ 1:10) → **Folhas**

- Chapas
- Placas
- Cascas

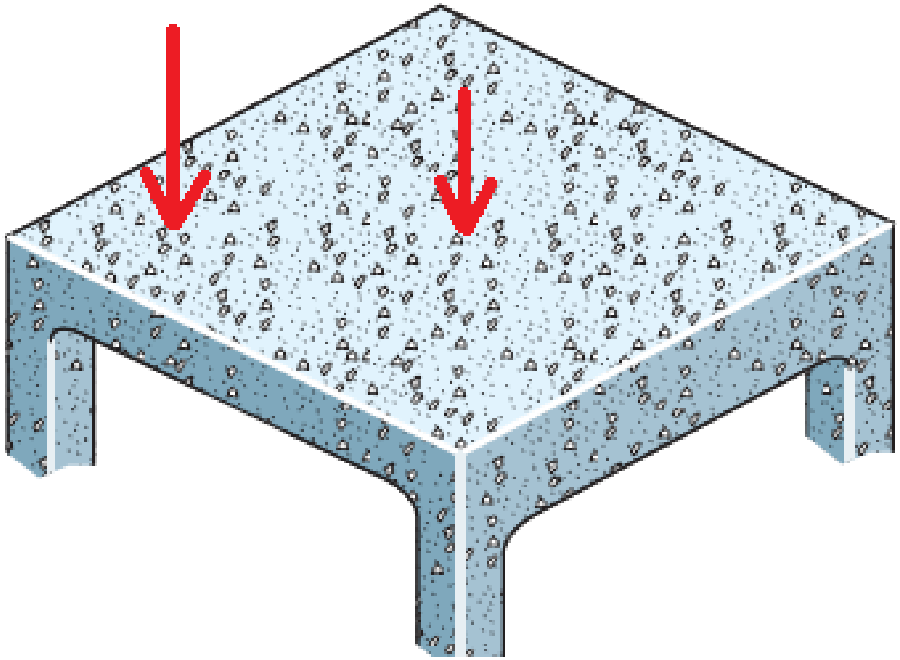
Chapas, Placas: lâminas planas

a) Chapas: solicitada por esforços com direções paralelas ao plano médio
Ex.: Viga-parede



Classificação dos elementos estruturais quanto à sua forma

b) Placas: superfície plana em que as ações são perpendiculares ao plano médio



Laje de um edifício

Radier

Classificação dos elementos estruturais quanto à sua forma

c) Casca: superfície não está contida num único plano, e são superfícies curvas
Ex.: Coberturas, silos, reservatório cilíndrico

Coberturas

reservatório cilíndrico

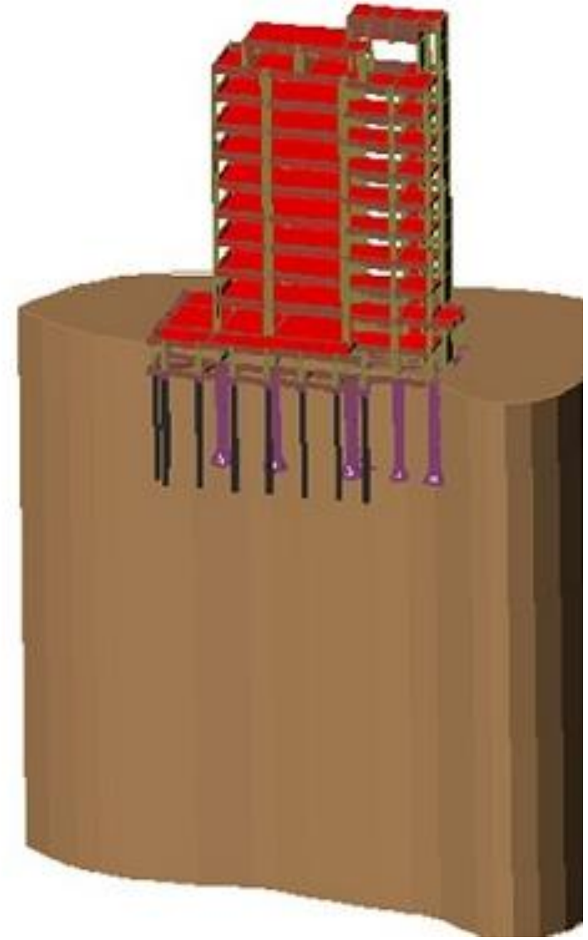
Silos de grãos

Classificação dos elementos estruturais quanto à sua forma

3) Tridimensionais (volumétricos): elementos com dimensões com a mesma ordem de grandeza

Ex.: Blocos de fundação, Solo

Edifício Yachthouse/SC, bloco de 4.600 m³ (1300 m^2 x 3,5m)
[81 andares e 275 metros de altura]



Solo analisado com elemento 3D

AÇÕES

Grandezas que levam a estrutura a deformar, gerando esforços internos que devem ser verificados nos projetos. Ações: são definidas por Normas Técnicas específicas.

Tipo de ações:

i. Ações permanentes: ocorrem praticamente em toda a vida da construção e com valores constantes

Peso Próprio, no concreto, γ = 25 kN/m^3 , aluminio: γ = 27 kN/m^3

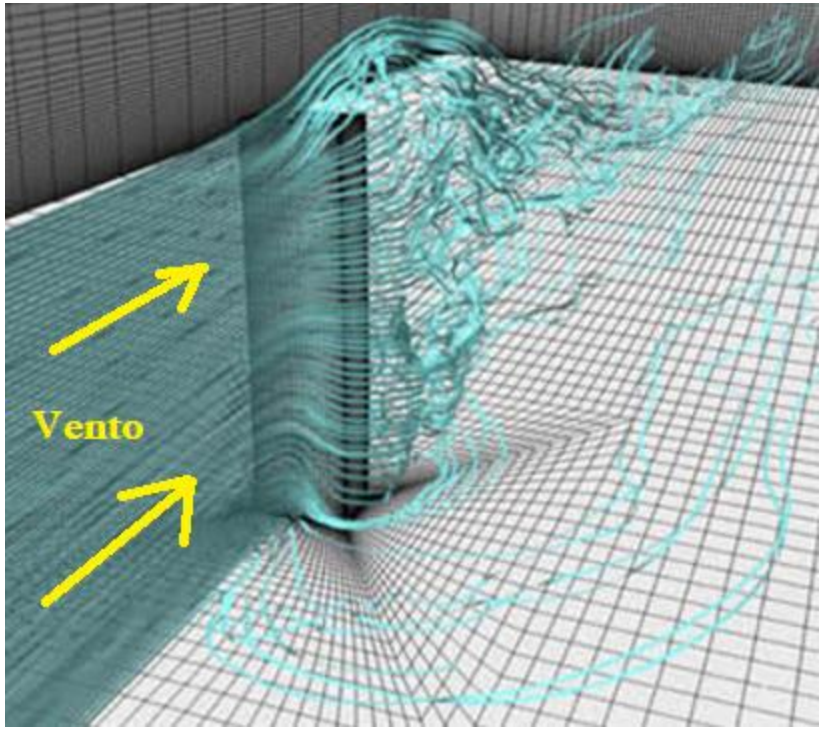
Peso dos elementos fixos nas instalações permanentes: parede, empuxo de terra, protensão.

Paredes: q = 1,9 kN/m^2 , cargas em escritório: q = 2,4 kN/m^2

AÇÕES

ii. Ações variáveis: atuação em torno da média. Cargas acidentais, deslocamentos de apoios, variação de temperatura

Ex.: Vento nos edifícios, impacto, cargas de veículos (cargas móveis), frenação/aceleração, pessoas no estádio, pilar de um edifício que se movimenta devido ao recalque (deformação) do solo.

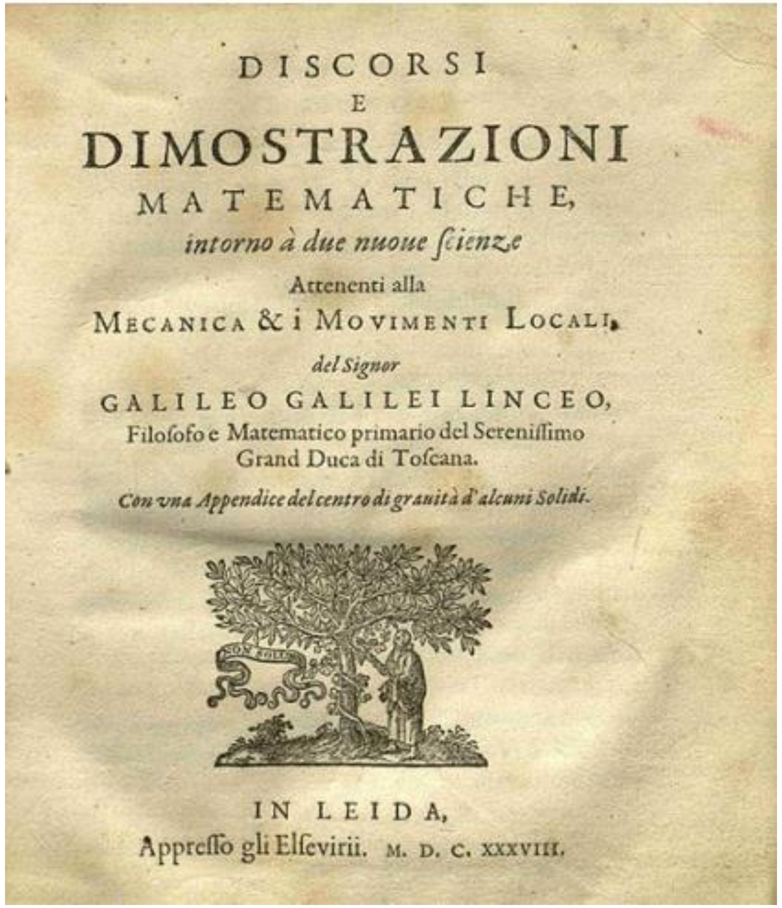


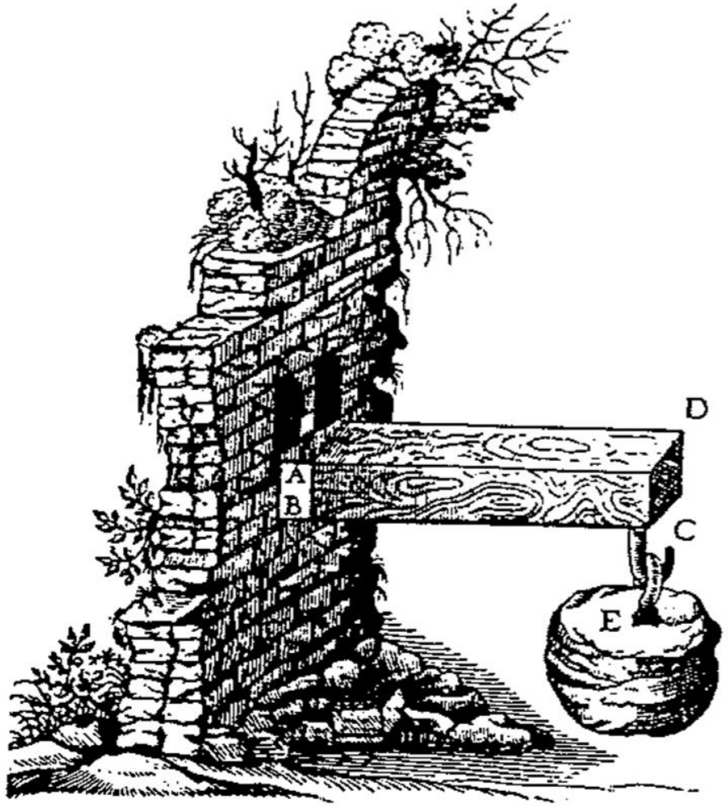
iii. Ações excepcionais: causas raras de ocorrência: explosões, colisões, incêndios.

OBJETIVO DA MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Estudar as leis e o comportamento das estruturas para levar o projeto seguro, econômico, durável e com sustentabilidade.

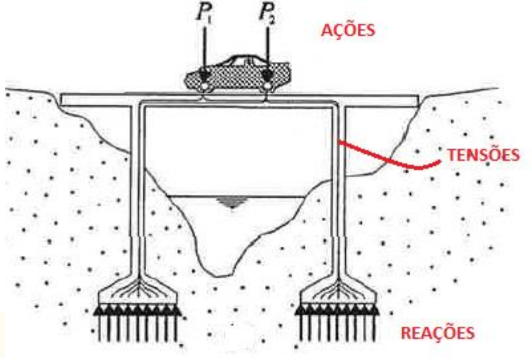
Introduzido por Galileu (1638) a abordagem de estruturas na ruptura: tamanho, carga

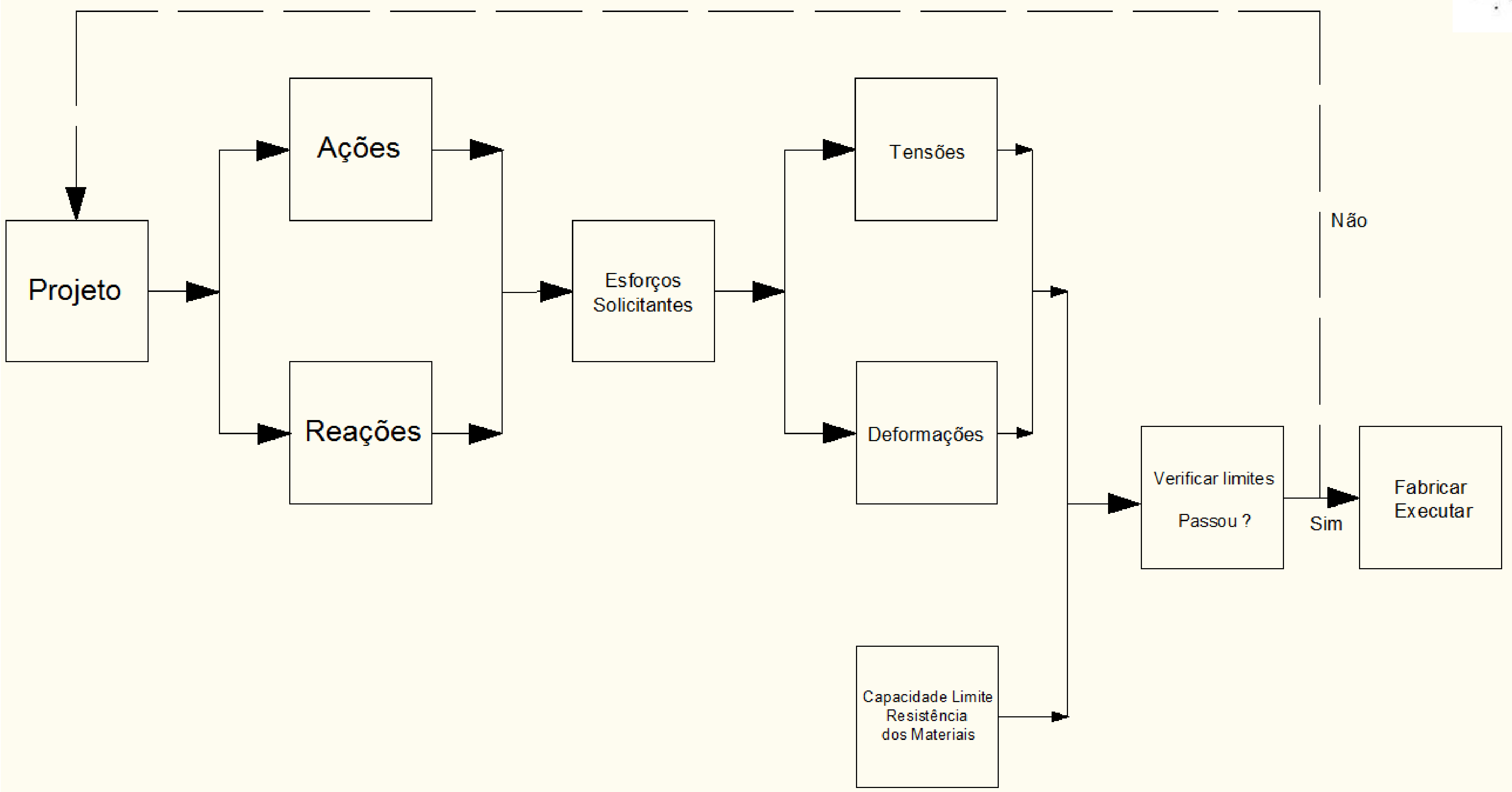

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.



Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a Due Nuove Scienze, 1638, Galileu Galilei

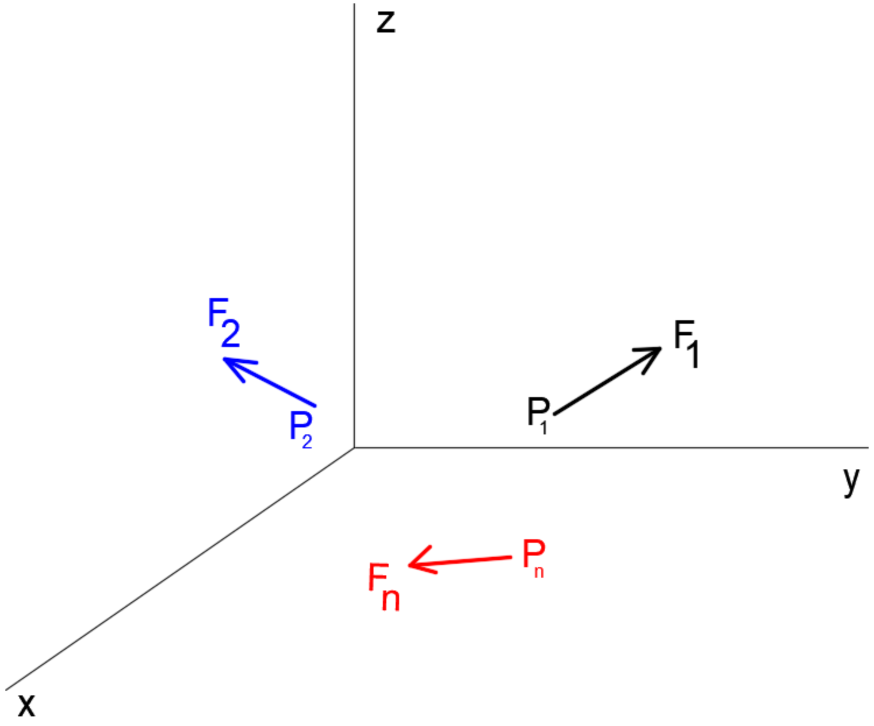
Escopo da Resistência dos Materiais





Recordação da estática dos sólidos rígidos

O conceito de força será introduzido por meio do 3º Princípio da Mecânica Clássica: "*Em cada instante, a ação mecânica de um corpo sobre um ponto material pode ser representada por um vetor (força interativa) aplicado no ponto*".



Dado um *sistema de forças* $S = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}$, tem-se:

<u>Definição 1.3</u>

Resultante de S é a soma vetorial das forças que o compõem.

A resultante é indicada por $\vec{R}$, tendo-se então

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ .$$

$$R_x = \sum_i^n F_{xi} \qquad R_y = \sum_i^n F_{yi} \qquad R_z = \sum_i^n F_{zi}$$

Recordação da estática dos sólidos rígidos

Definição 1.4

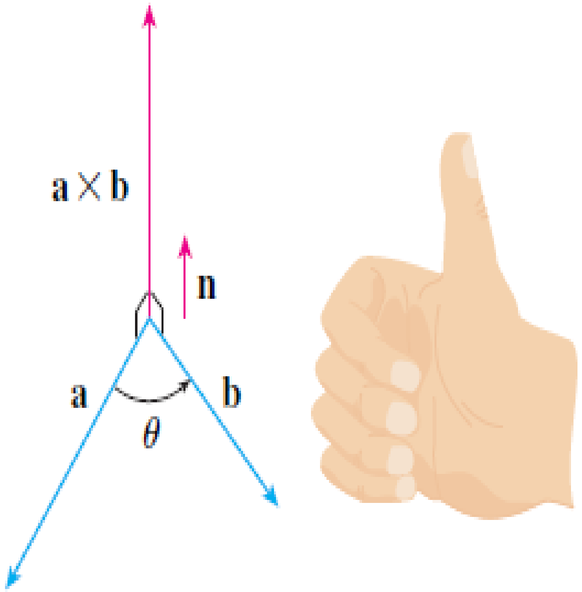
Momento de S em relação a um ponto O é a soma vetorial dos momentos de cada uma das forças do sistema em relação a esse ponto.

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$

Definição: Se $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ então o produto vetorial de a e b é o vetor:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \underbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}_{\mathbf{c_x}}\mathbf{i} + \underbrace{(a_z b_x - a_x b_z)}_{\mathbf{c_y}}\mathbf{j} + \underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{\mathbf{c_z}}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Recordação da estática dos sólidos rígidos

Regra da mão direita

Sabe-se que o momento $\vec{M}_O$ tem a direção da reta r da Figura 1.4, passando por O e perpendicular ao plano definido pela linha de ação de (P, $\vec{F}$) e pelo ponto O (plano π).

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \underbrace{(a_y b_z - a_z b_y)}_{\mathbf{c_x}}\mathbf{i} + \underbrace{(a_z b_x - a_x b_z)}_{\mathbf{c_y}}\mathbf{j} + \underbrace{(a_x b_y - a_y b_x)}_{\mathbf{c_z}}\mathbf{k}$$

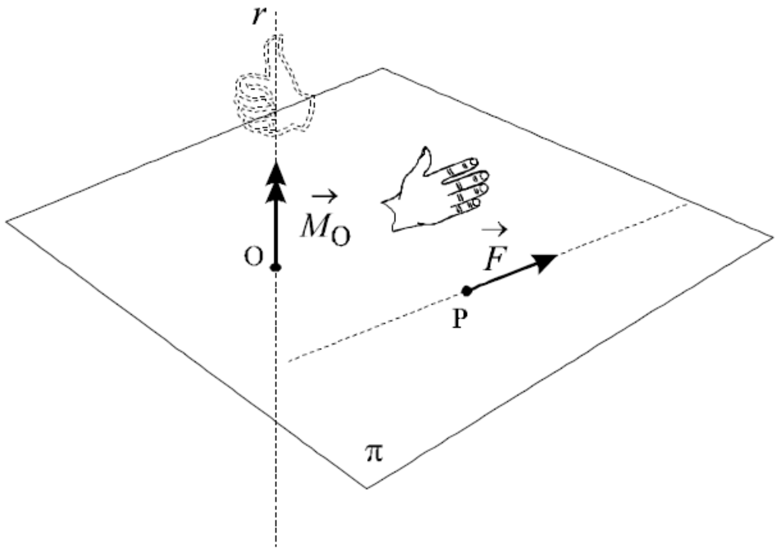


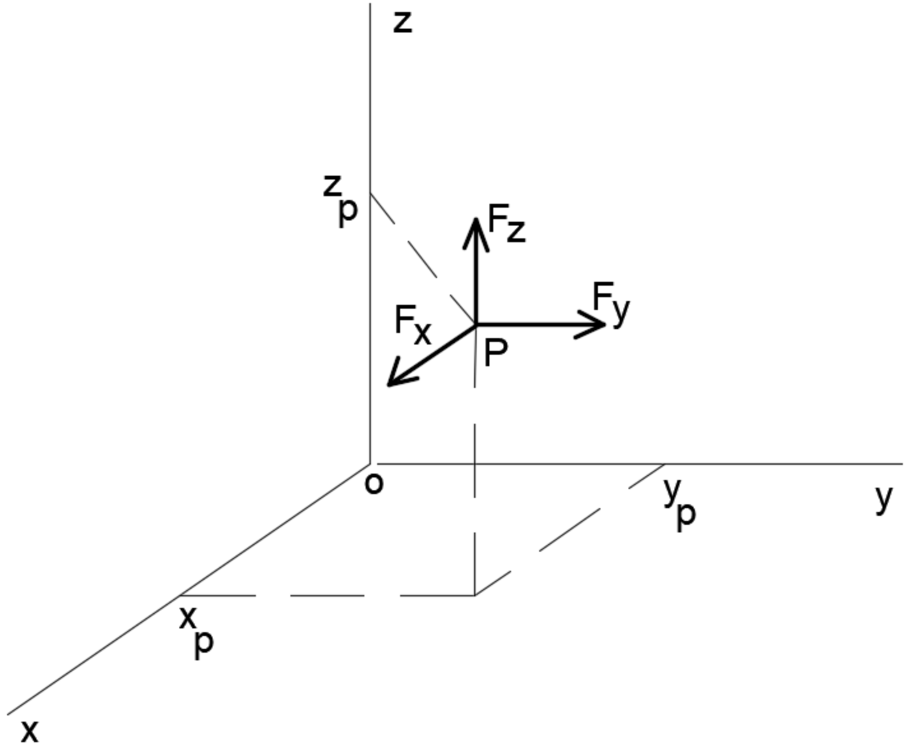
Figura 1.4

O sentido de $\vec{M}_O$ pode ser determinado da seguinte maneira:

- no plano que contém a linha de ação de (P, $\vec{F}$) e é perpendicular a π, coloque a mão direita com a palma voltada para a reta r e com os dedos no sentido de $\vec{F}$;
- deixe o polegar perpendicular aos demais dedos;
- o sentido de $\vec{M}_O$ é então o apontado pelo polegar da mão direita (Figura 1.4).

Recordação da estática dos sólidos rígidos

As forças em P geram que momento em “O”?



$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$

$$r = (x_p - x_o)i + (y_p - y_o)j + (z_p - z_o)k$$

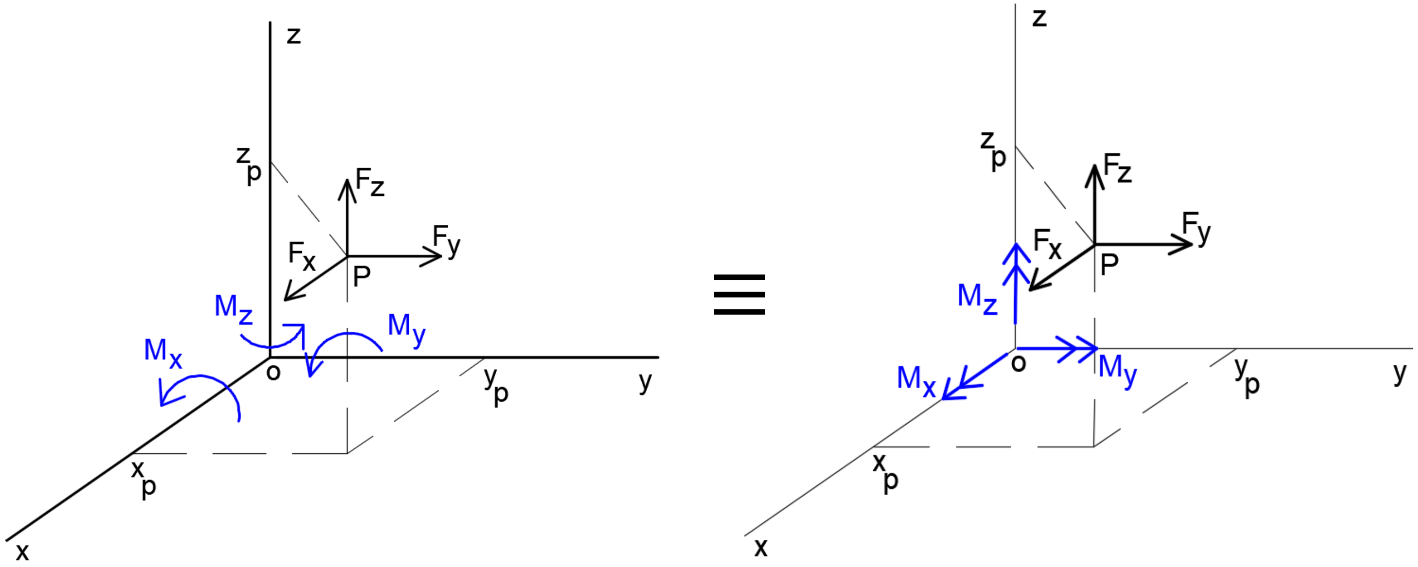
$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$M_0 = [(x_p - x_o)i + (y_p - y_o)j + (z_p - z_o)k] \wedge [F_x i + F_y j + F_z k]$$

Recordação da estática dos sólidos rígidos

$$M_o = M_x i + M_y j + M_z k$$

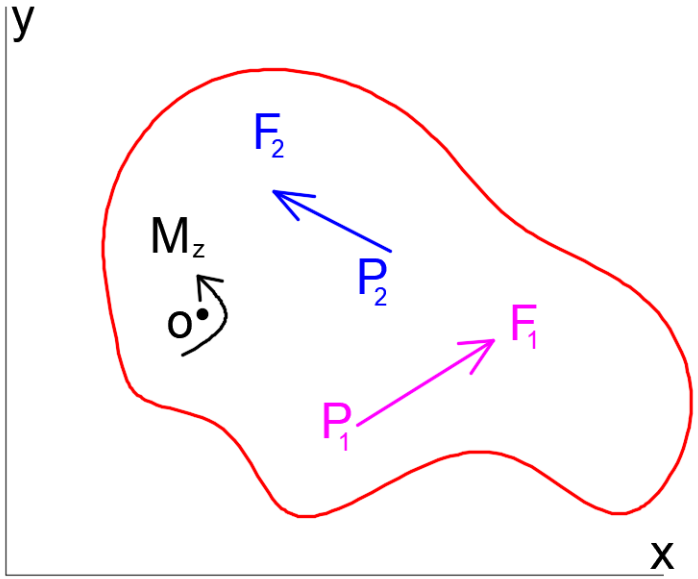
$$M_x = (y_p - y_o)F_z - (z_p - z_o)F_y$$
$$M_y = (z_p - z_o)F_x - (x_p - x_o)F_z$$
$$M_z = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$



Sistema coplanar (Estruturas no plano)

$$R_x = \sum_i^n F_{xi} \qquad R_y = \sum_i^n F_{yi}$$

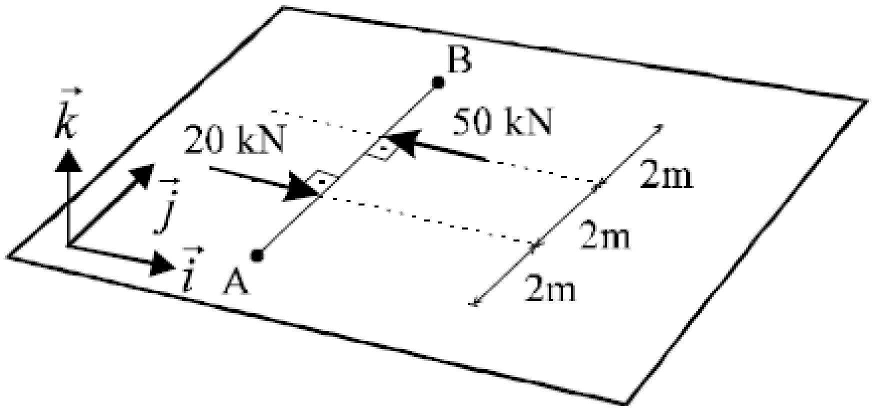
$$M_z = \mathrm{M} = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$



Recordação da estática: sistema mecanicamente equivalentes

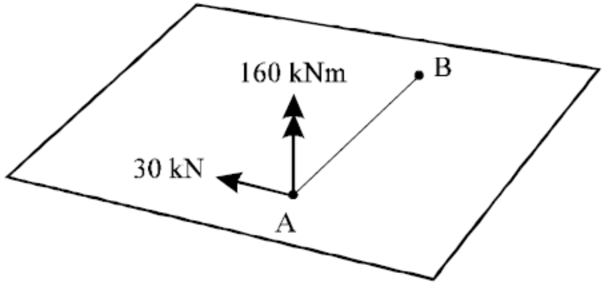
Diz-se que dois sistemas de forças S e S' são *mecanicamente equivalentes* quando suas reduções em um mesmo ponto genérico A levam aos mesmos esforços, isto é, $\vec{R} = \vec{R}'$ e $\vec{M}_A = \vec{M}'_A$.

Exemplo 1 Considere-se a barra da figura em que são aplicadas duas forças coplanares, que constituem o sistema de esforços S_I. Obtenha um sistema equivalente em A

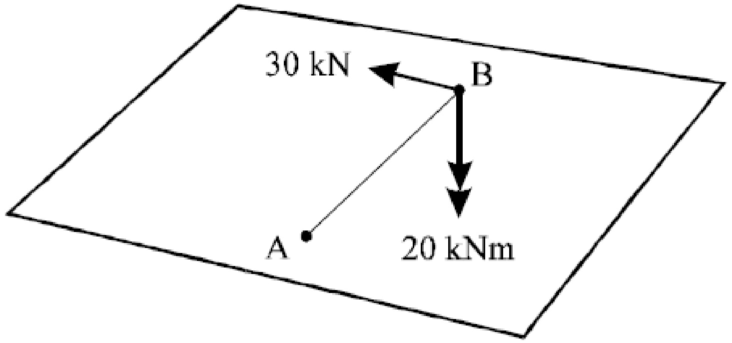


$$\vec{R} = 20\vec{i} - 50\vec{i} = -30\vec{i}$$

$$\vec{M}_A = -20 \cdot 2\vec{k} + 50 \cdot 4\vec{k} = 160\vec{k}$$



Sistema equivalente em B



Exemplo 2

Determinar para que ponto da barra da Figura 1.25 a redução do sistema de forças aplicadas conduz exclusivamente à resultante R.

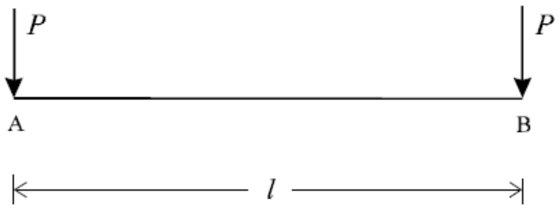


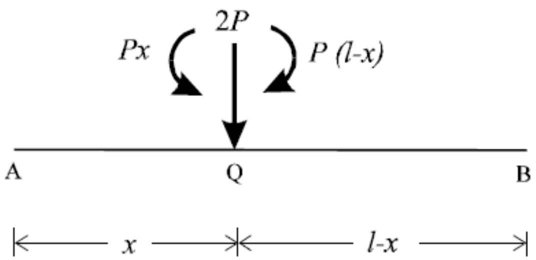
Figura 1.25

A solução direta consiste na redução do sistema em um ponto genérico Q da barra e na determinação de qual deve ser a posição do ponto Q para que o momento de redução se anule.

A redução do sistema em Q leva aos esforços indicados na Figura 1.26.

O momento de redução é

$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x)\,; \qquad (1.30)$$



$$M_Q = P \cdot x - P \cdot (l - x) = 0 \qquad (1.31)$$

$$2\,P \cdot x - P \cdot l = 0 \qquad (1.32)$$

$$x = \frac{l}{2}. \qquad (1.33)$$

Conclui-se, então, que o polo no qual o sistema de forças da Figura 1.25 se reduz exclusivamente à resultante é o ponto médio da barra, como se indica na Figura 1.27.

Como já se verificou, a redução de um sistema de forças em um ponto leva a um sistema mecanicamente equivalente ao sistema que já foi reduzido. São, portanto, mecanicamente equivalentes os dois sistemas representados na Figura 1.28, onde o símbolo ≡ indica a equivalência mecânica entre eles.

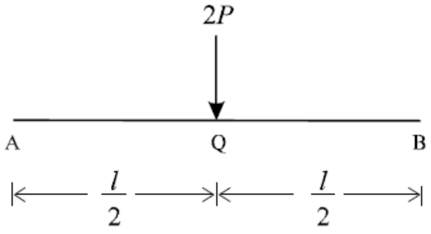


Figura 1.27

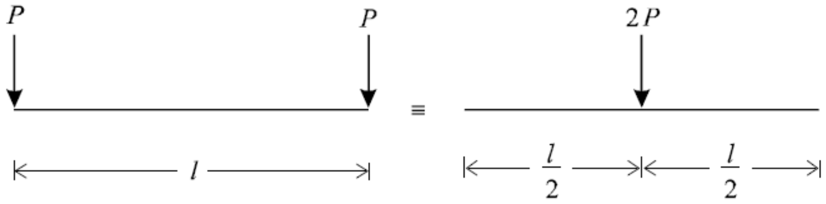


Figura 1.28

Exemplo 3

Aplicar na barra da Figura 1.31 uma única força mecanicamente equivalente ao sistema aplicado

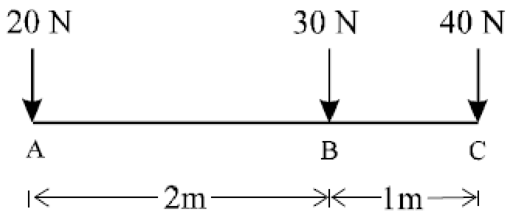


Figura 1.31

A força procurada é a resultante do sistema, mostrada na Figura 1.32.

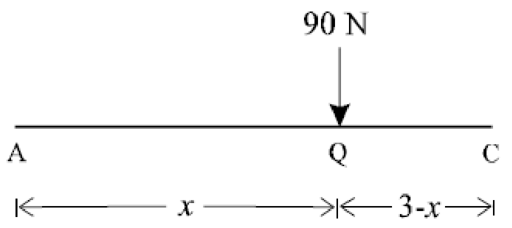


Figura 1.32

A redução do sistema da Figura 1.31 no ponto A leva ao momento

$$M_A = -30 \cdot 2 - 40 \cdot 3 = -180 \text{ Nm} \, ; \qquad (1.35)$$

a redução da resultante da Figura 1.32 nesse mesmo ponto leva ao momento

$$M_A = -90 \cdot x \, . \qquad (1.36)$$

Impondo que esses dois momentos sejam iguais, obtém-se

$$M_A = -180 = -90 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{180}{90} = 2 \text{ m} \, . \qquad (1.37)$$

São portanto mecanicamente equivalentes os dois sistemas da Figura 1.33.

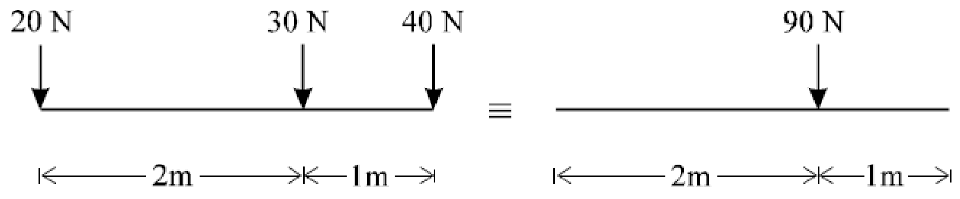
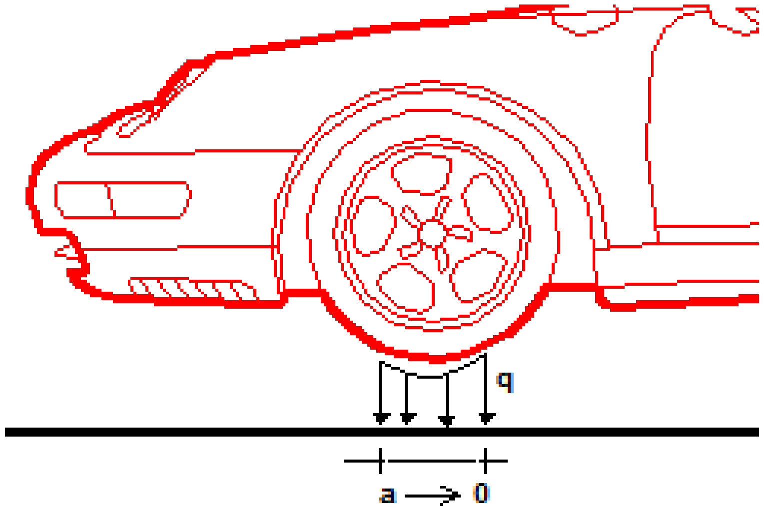
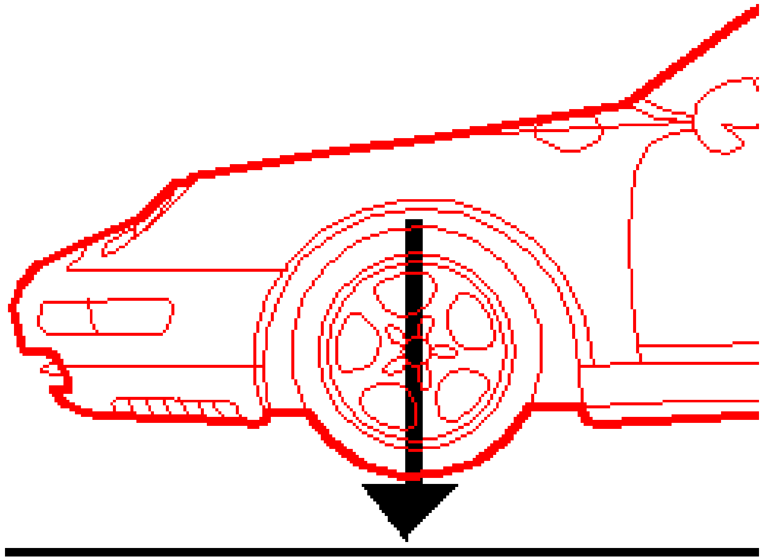


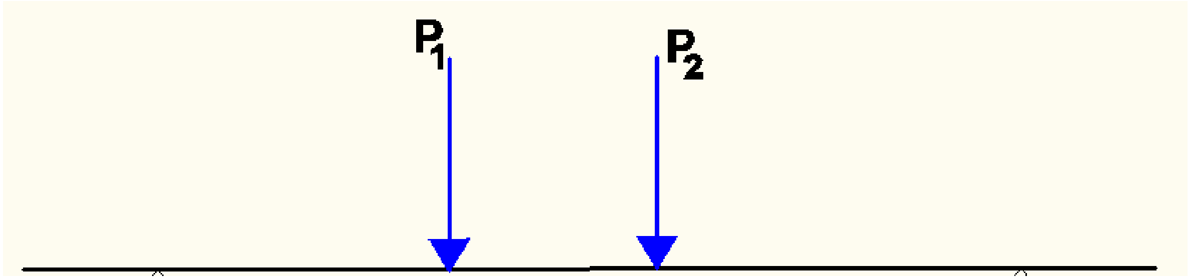
Figura 1.33

Ações: Tipos de cargas

a) Forças Concentradas

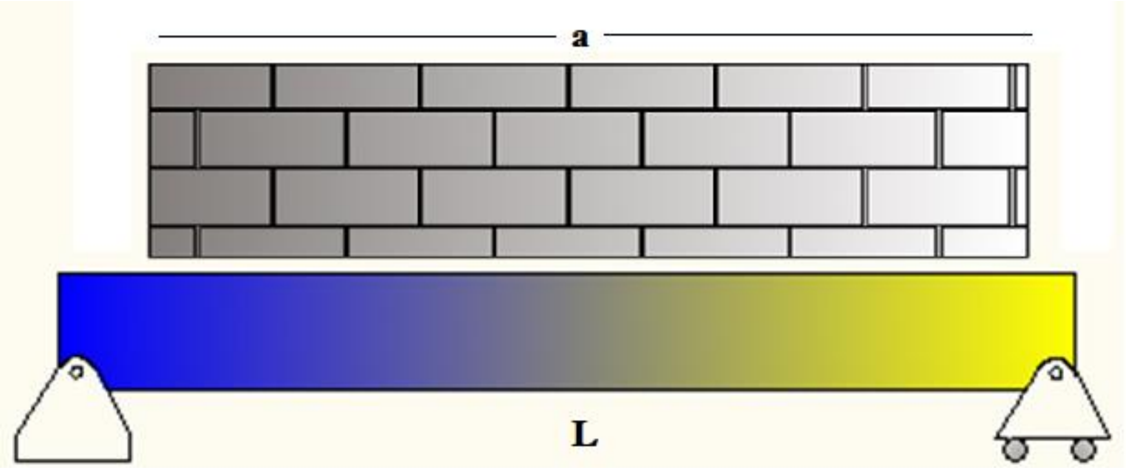


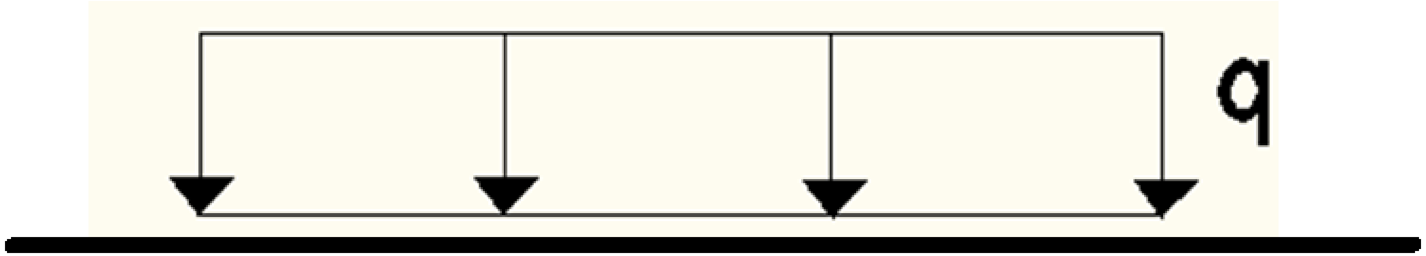




Ações: cargas distribuídas (q, unidade: F/L)

b) Carga distribuída constantemente Ex.: parede sobre uma viga

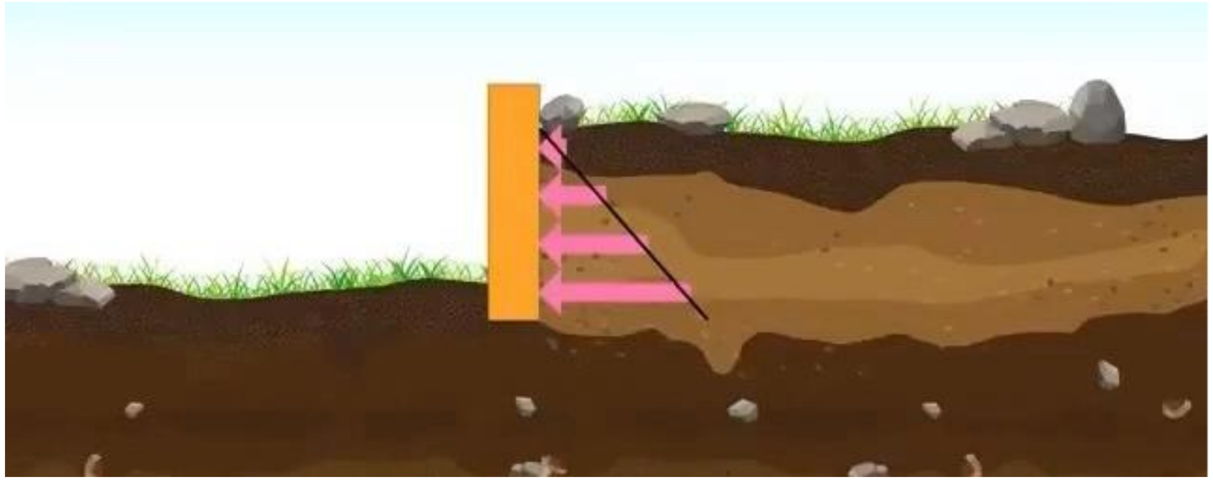


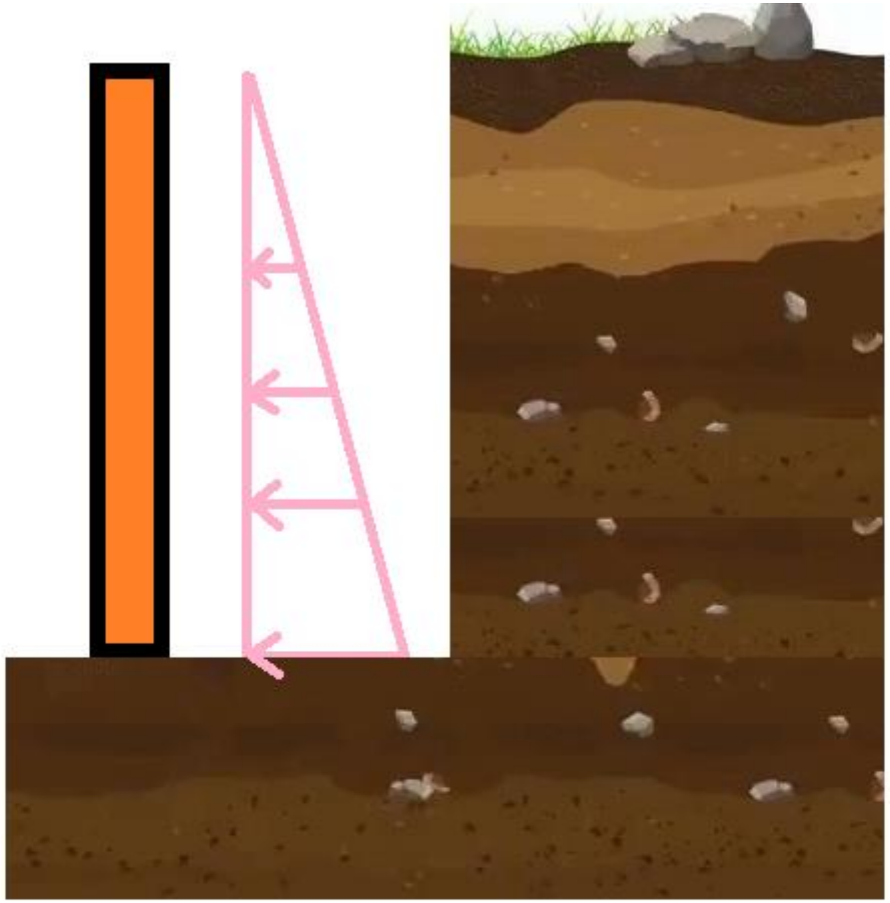


a não é muito pequeno em relação a ***L***

Ações: cargas distribuídas (q, unidade: F/L)

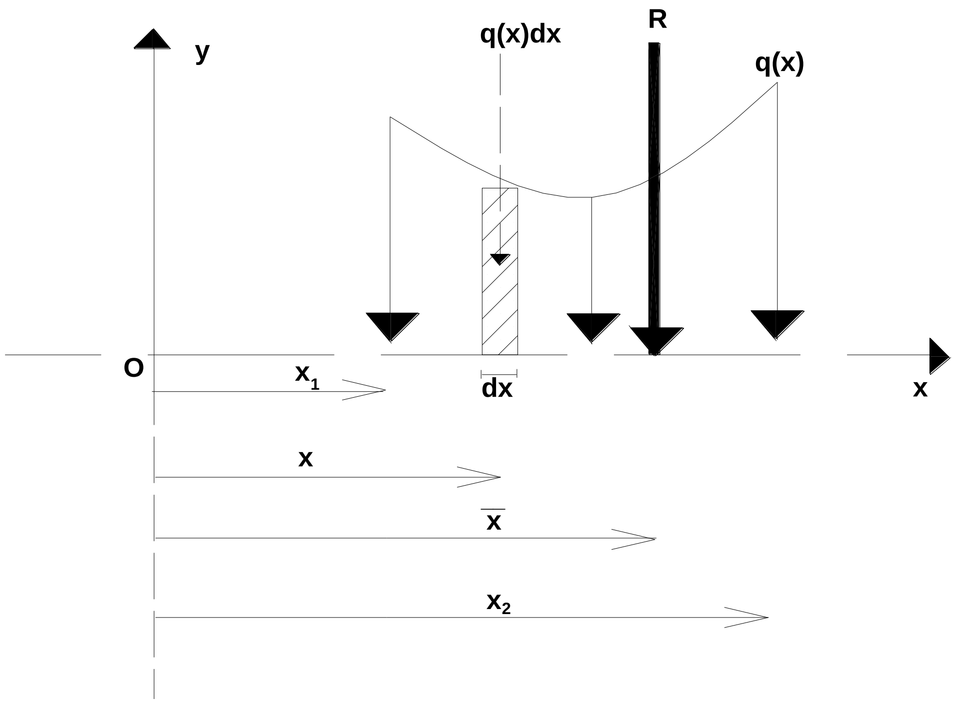
c) Carga distribuída linearmente
Ex.: empuxo de terra, água





Ações: cargas distribuídas (q, unidade: F/L)

Como calcular a resultante da carga distribuída?



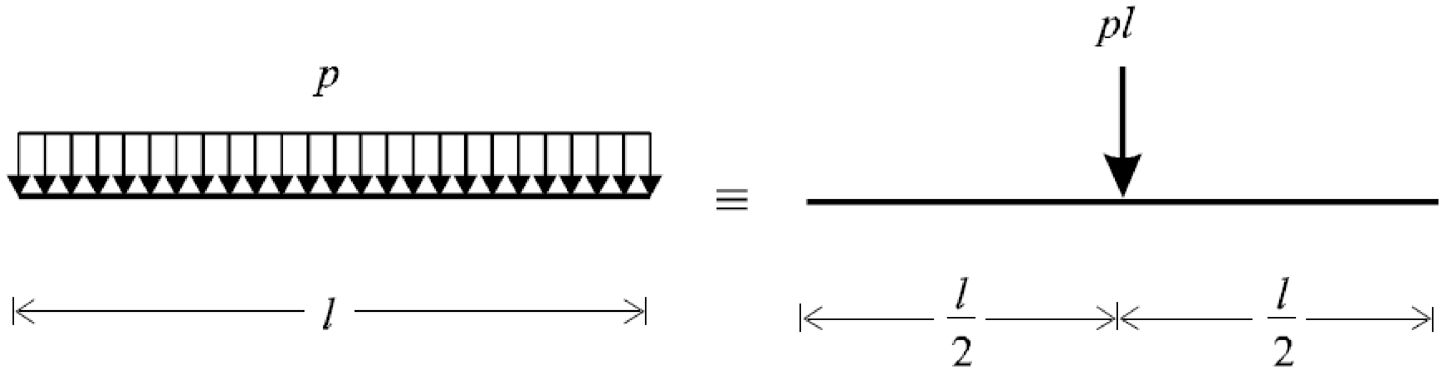
E qual é a posição da resultante (R)?

$$\bar{x} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{R} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{A} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot x \cdot dx}{\int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot dx} (CG \ da \ área)$$

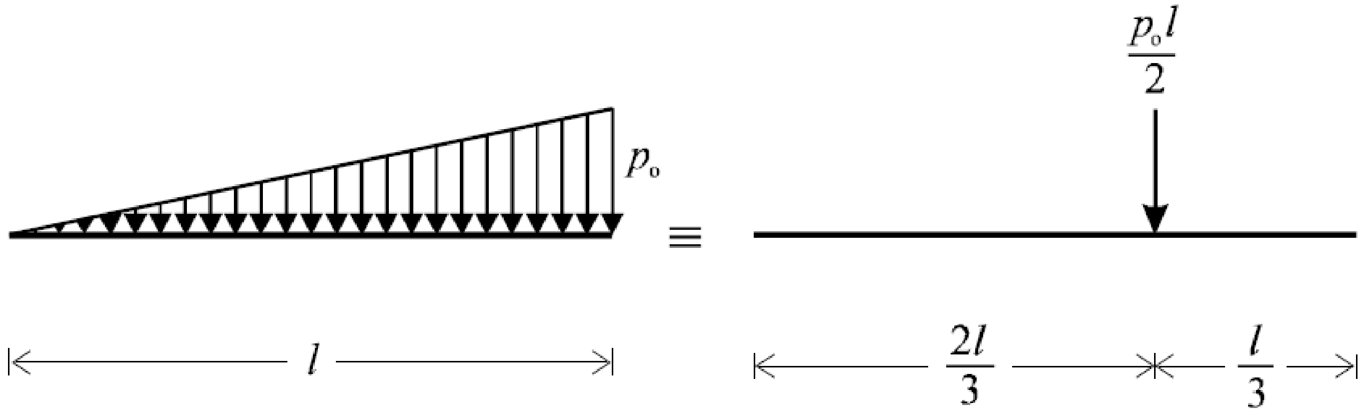
$$R = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} dF = Área$$

Substituindo o carregamento distribuído por uma força concentrada estaticamente equivalente para os dois casos a seguir, tem-se as respostas indicadas.

Exemplo 4



Exemplo 5



Estruturas Estáticas

Estática dos sistemas rígidos

Equações de Equilíbrio:

$$R = m \cdot a = 0 \xrightarrow{a=0} R = 0\ ; \quad \sum R = 0 \quad (Forças)\ ; \sum M = 0 \quad (Momento)$$

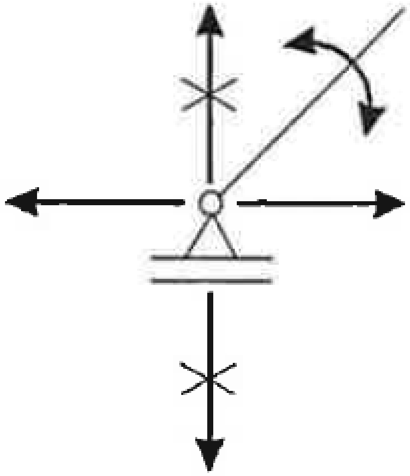
$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum M_A = 0$$

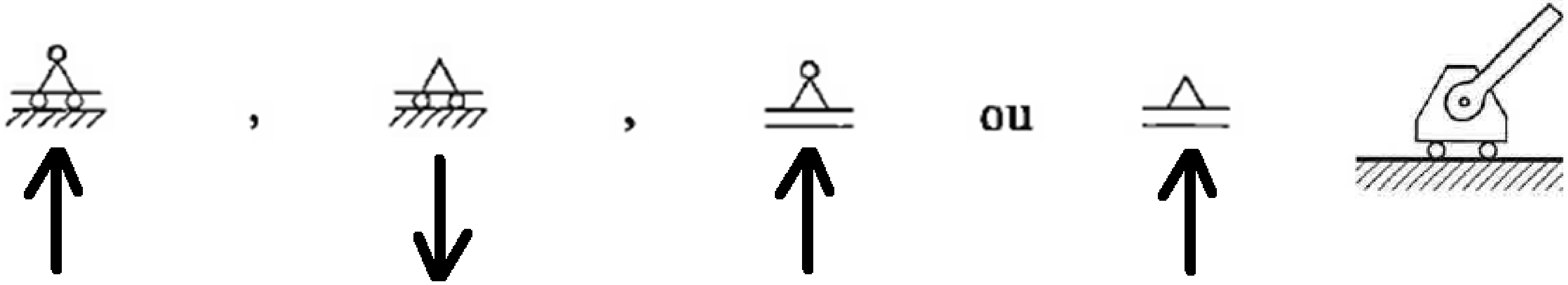
A é um ponto qualquer do plano da estrutura (pólo)

Restrições de movimento e reações associadas (plano)

Duas translações e uma rotação

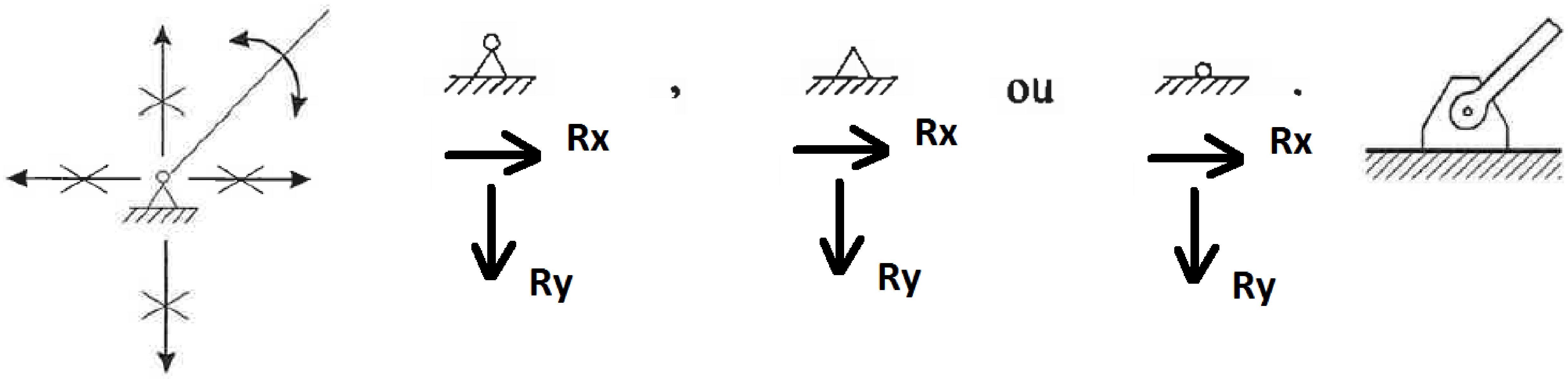
a) 1º. Gênero ou articulação móvel ou apoio simples: impede uma translação no plano





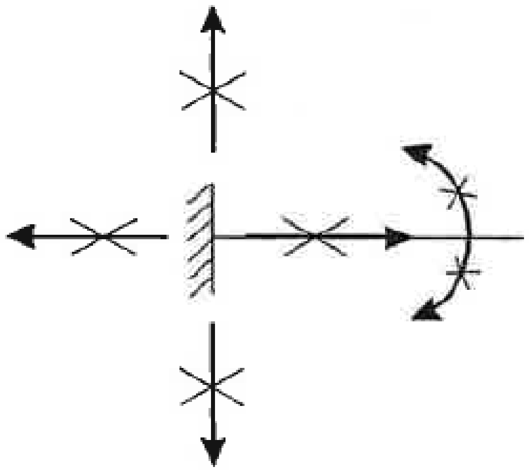
Graus de liberdade e apoios (plano)

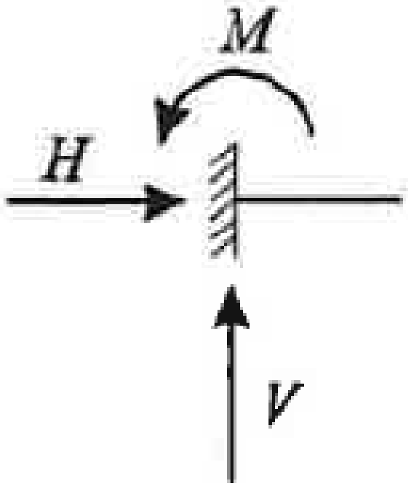
b) 2º. Gênero ou articulação fixa/apoio fixo: impedem duas translações no plano

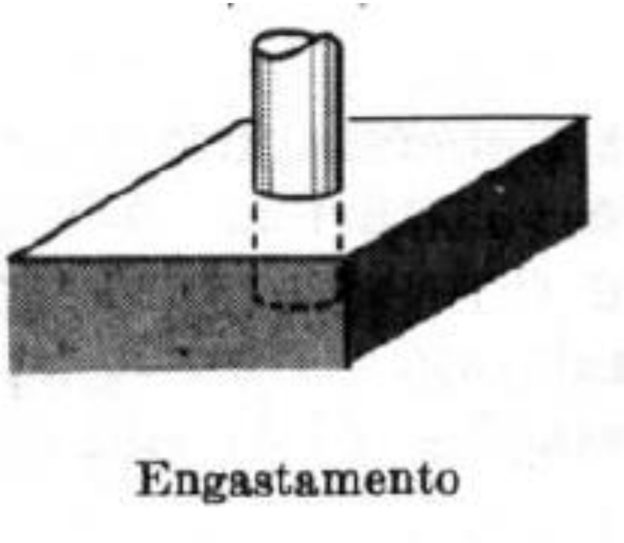


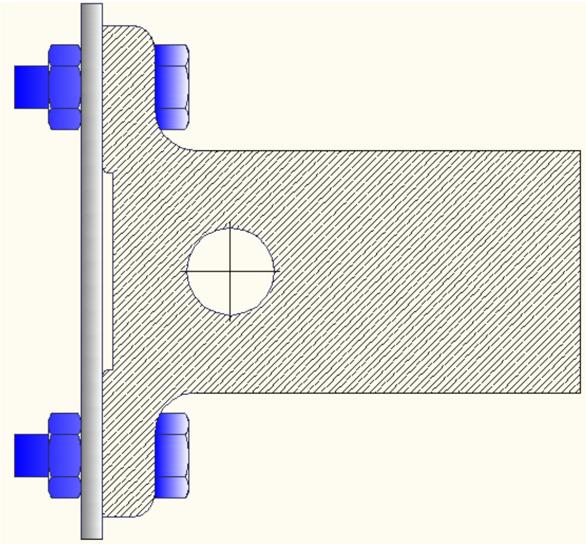
Graus de liberdade e apoios (plano)

c) Engaste: impedem duas translações e uma rotação no plano



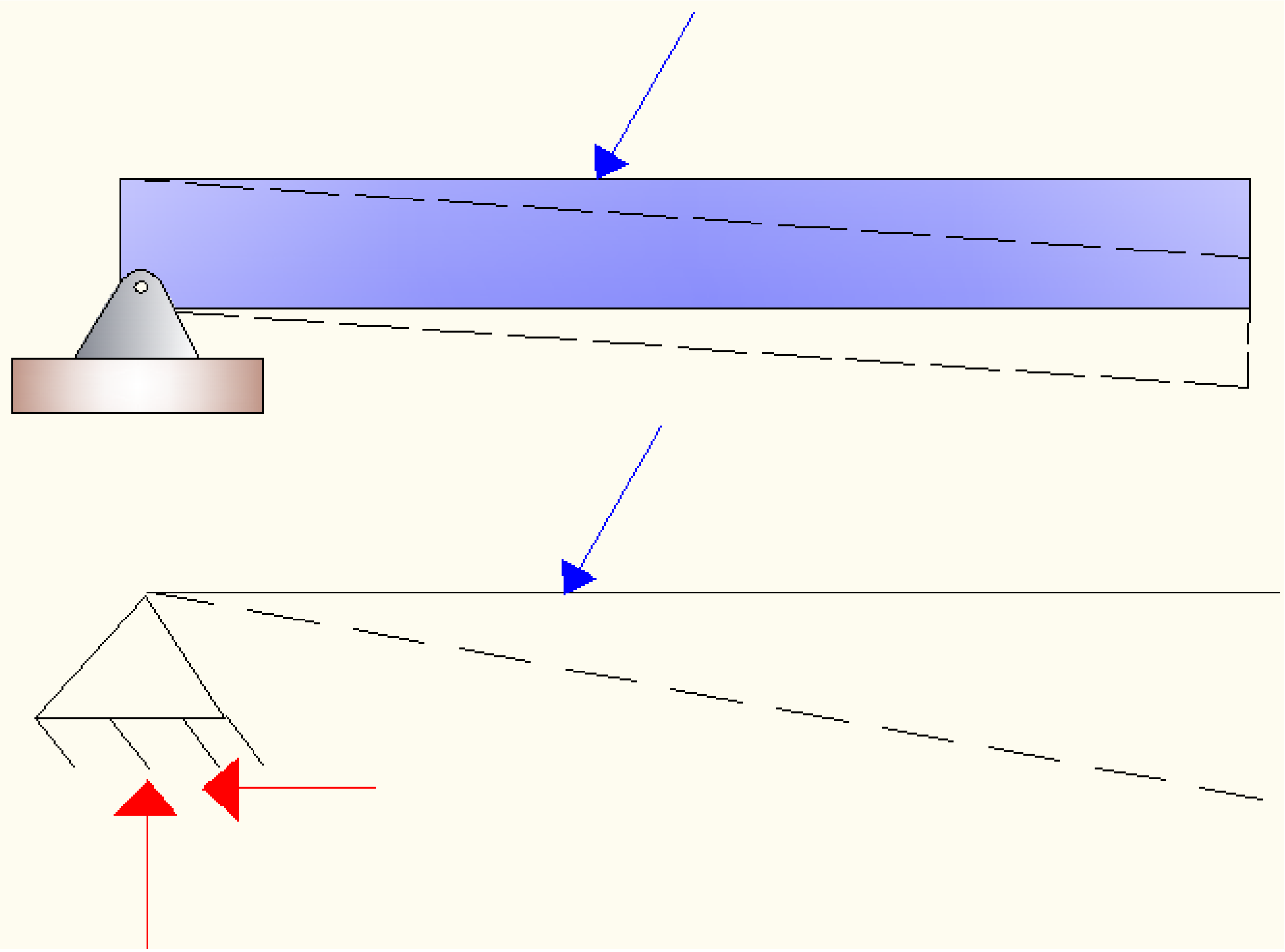






Classificação das estruturas quanto à estaticidade

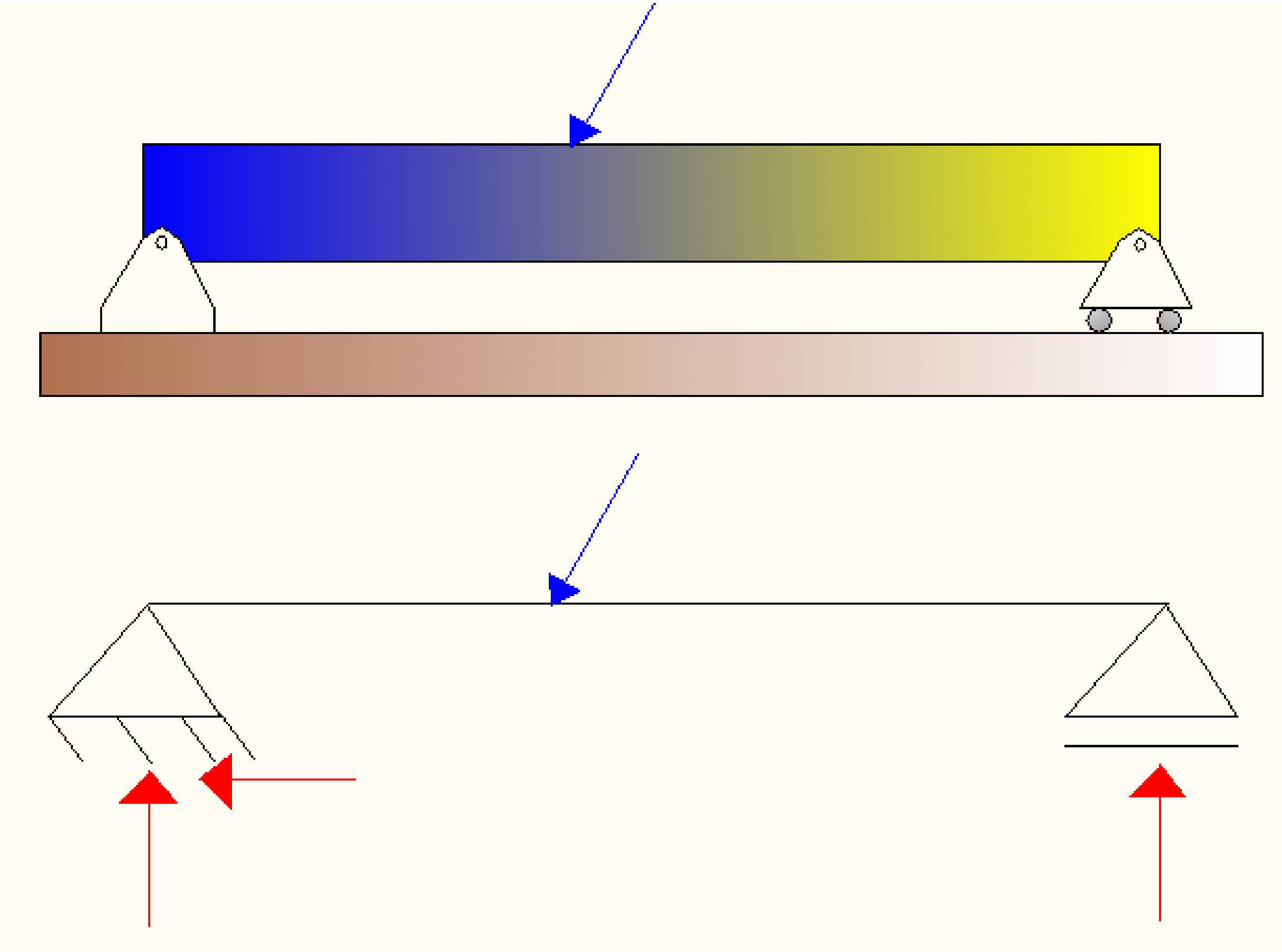
a) Estrutura Hipostática: menos de 3 vínculos



Algum movimento está livre

Classificação das estruturas quanto à estaticidade

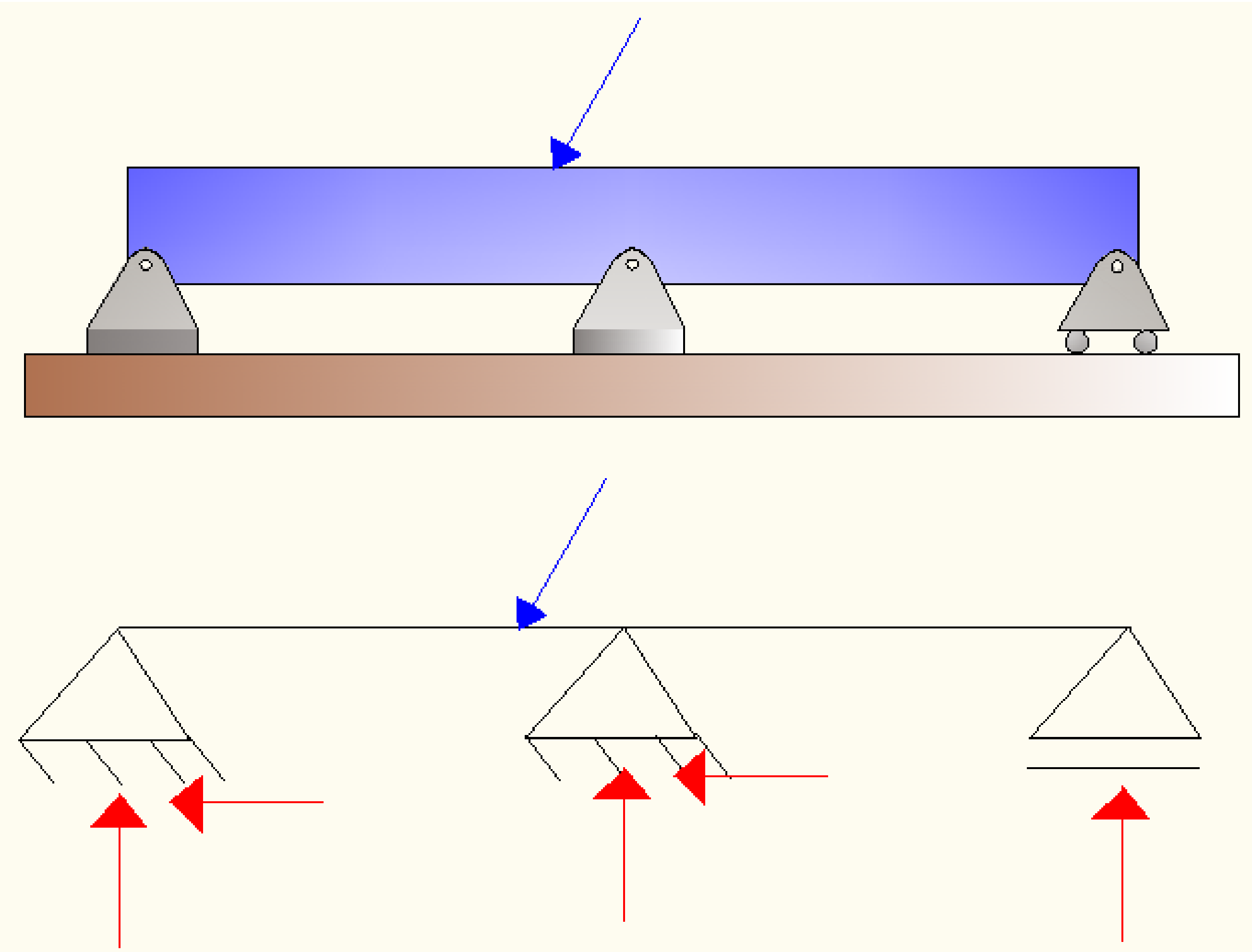
b) Estrutura Isostática: exatamente 3 vínculos



- **3 movimentos impedidos**

Classificação das estruturas quanto à estaticidade

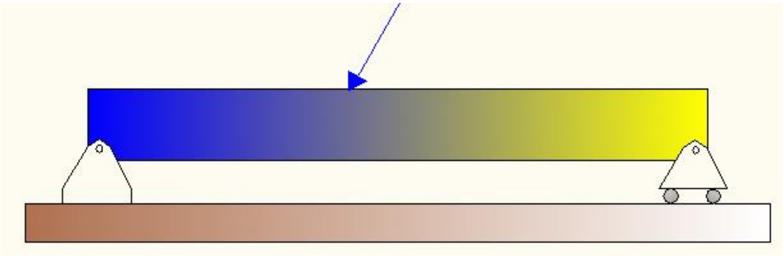
c) Estrutura Hiperestática: mais de 3 vínculos



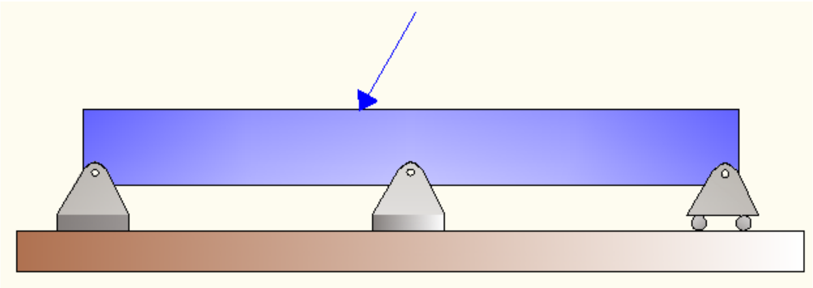
- Mais de 3 movimentos impedidos

Estruturas isostáticas e hiperestáticas deformam

Serão estudados nesse curso esses tipos

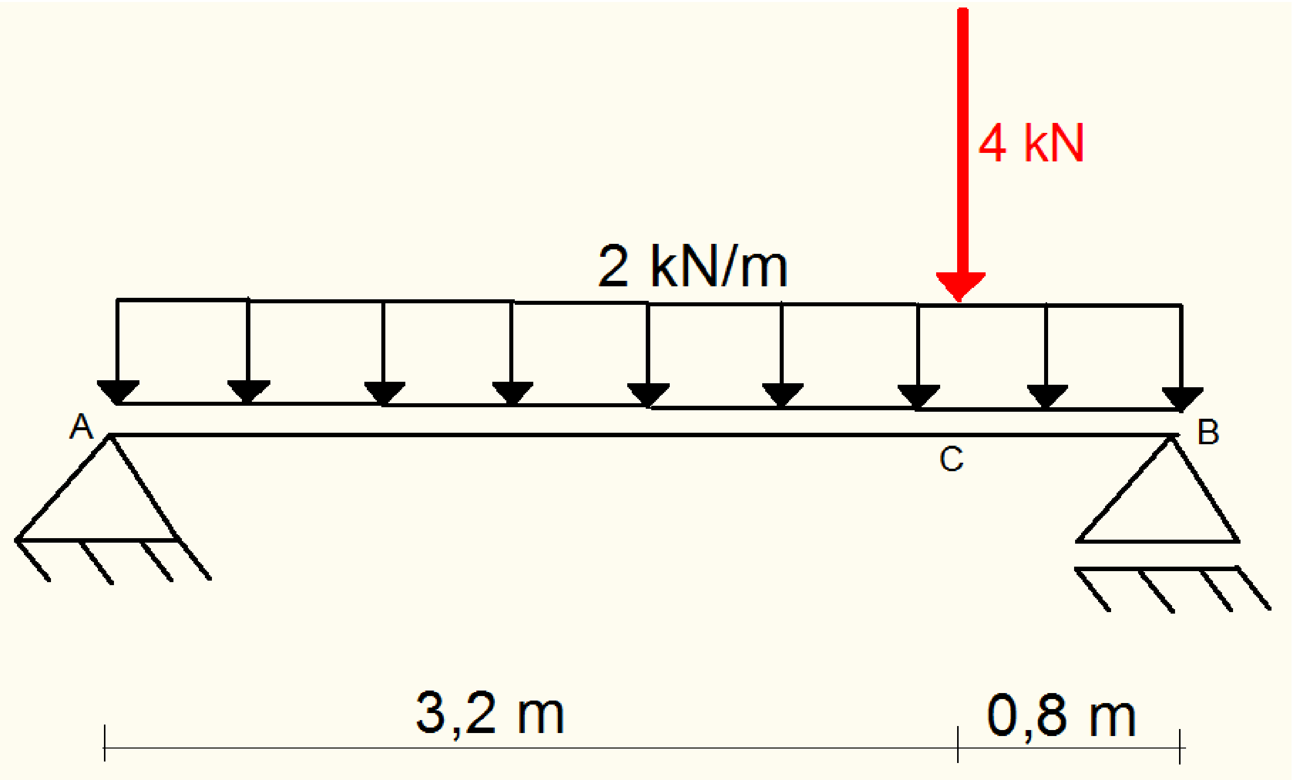


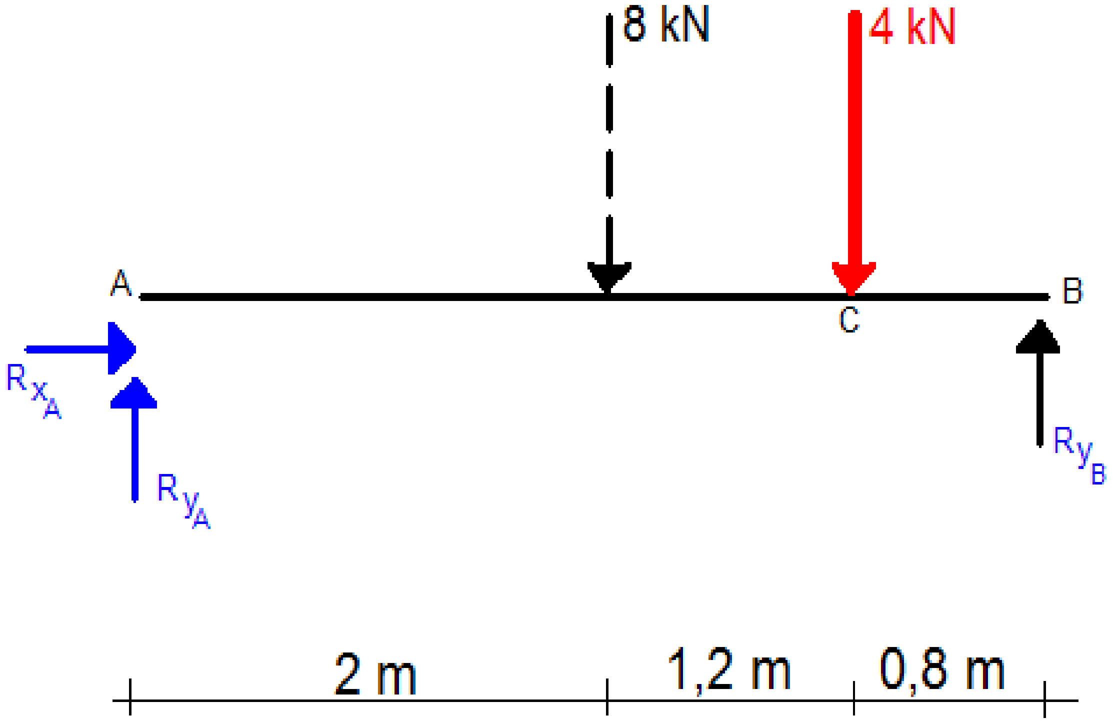
Isostáticas, 95% do curso



Hiperestáticas, 5% do curso

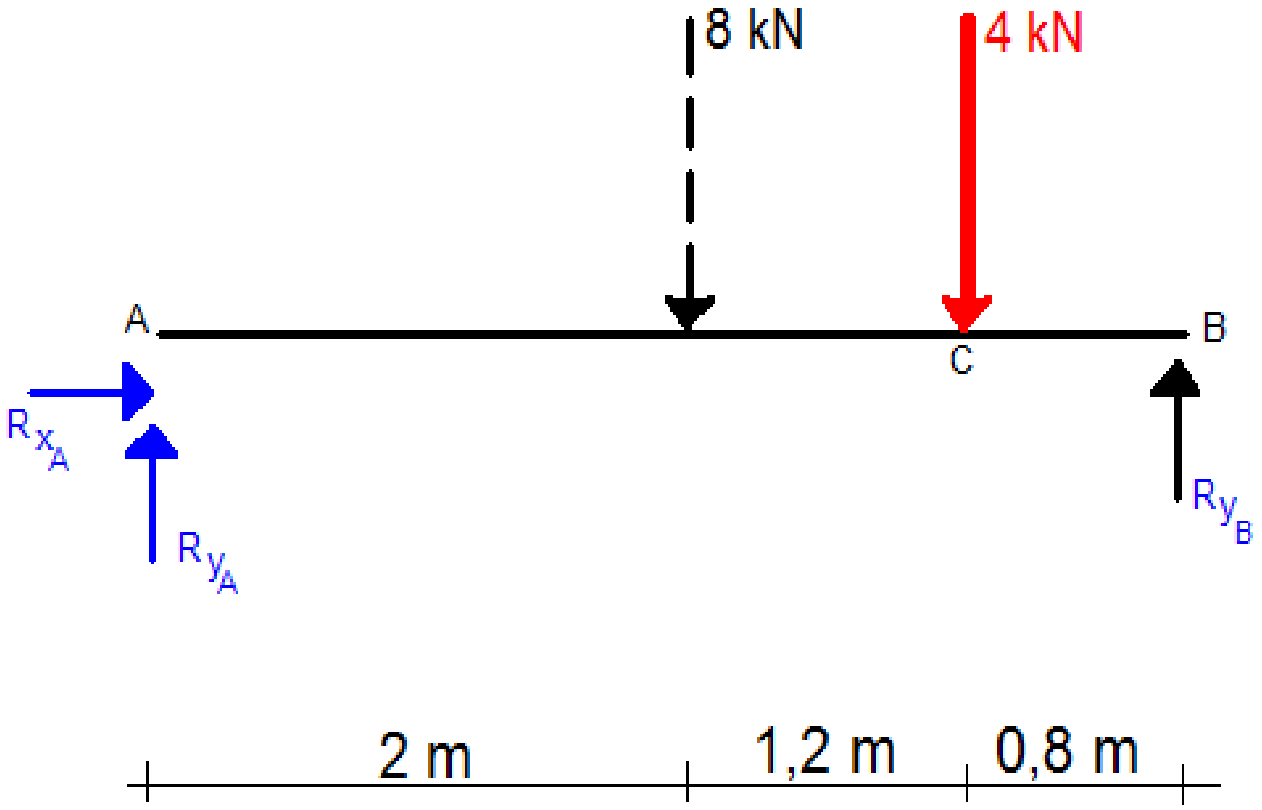
Exemplo 6: Calcule as reações da estrutura





$$\sum F_x = 0: \qquad R_{XA} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad R_{YA} + R_{YB} - 12 = 0$$



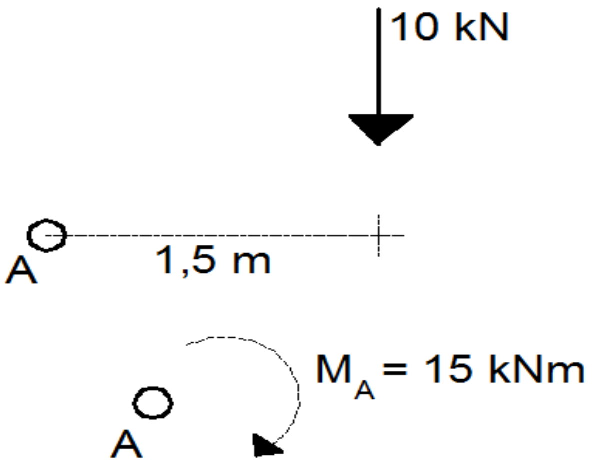
Lembrando que:

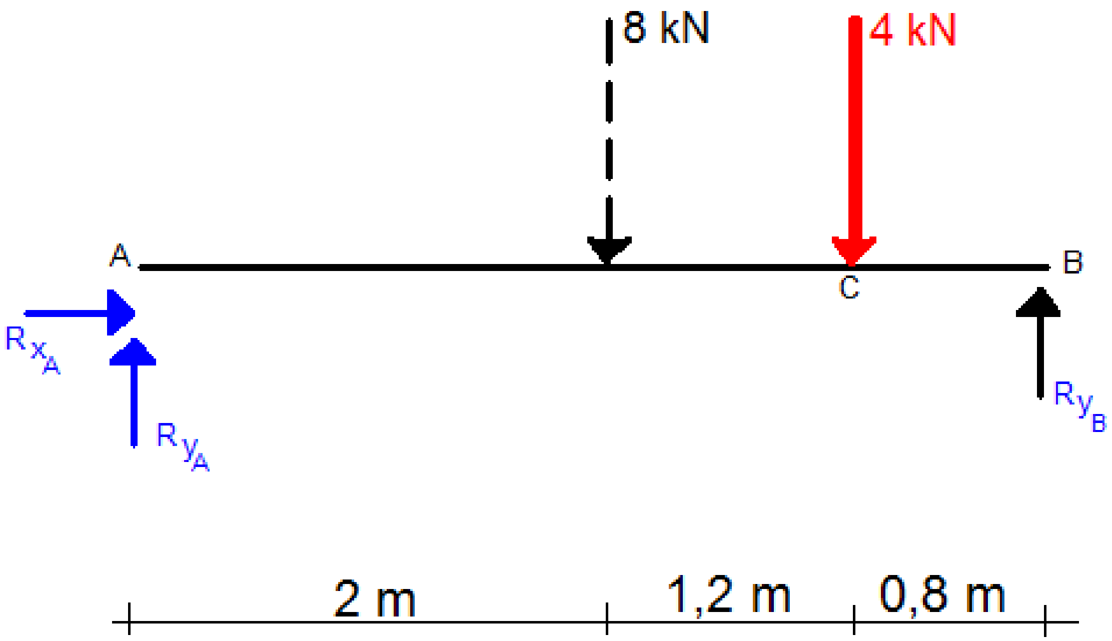
$$\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F}$$

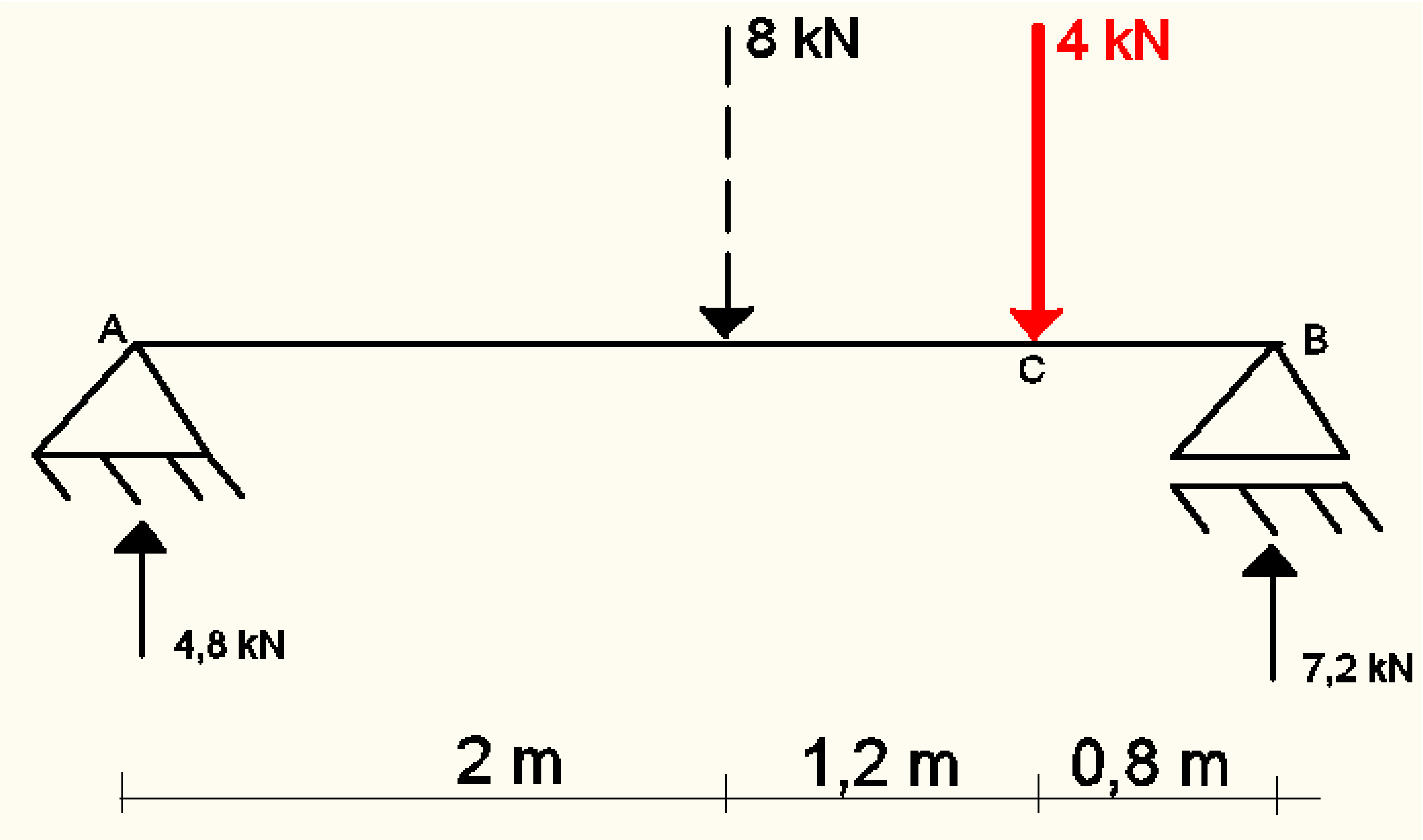
$$\left\|\overrightarrow{M}_O\right\| = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \; sen\,\alpha$$

$$\sum M_A = 0: \; + \qquad 4{,}0 \cdot R_{YB} - 8{,}0 \cdot 2{,}0 - 4{,}0 \cdot 3{,}2 = 0 \rightarrow R_{YB} = 7{,}2 \; kN$$

$$\therefore R_{YA} = 12 - 7{,}2 = 4{,}8 \; kN$$

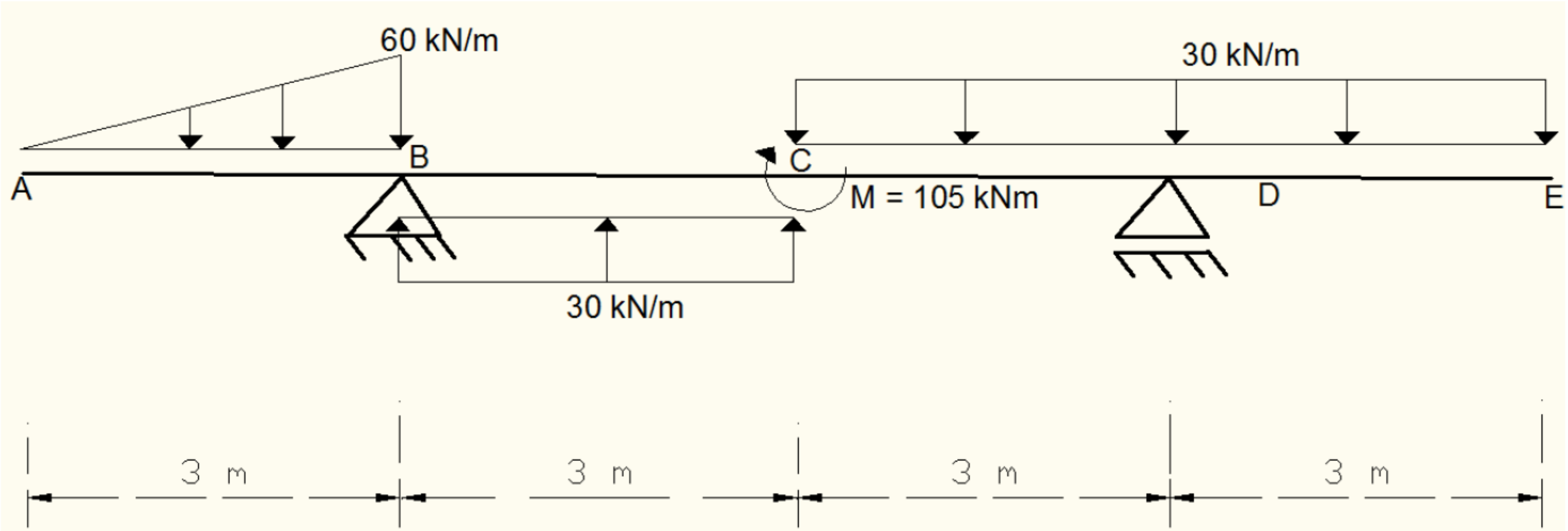





8 kN
4 kN
A
C
B
4,8 kN
7,2 kN
2 m
1,2 m
0,8 m

Exemplo 7*

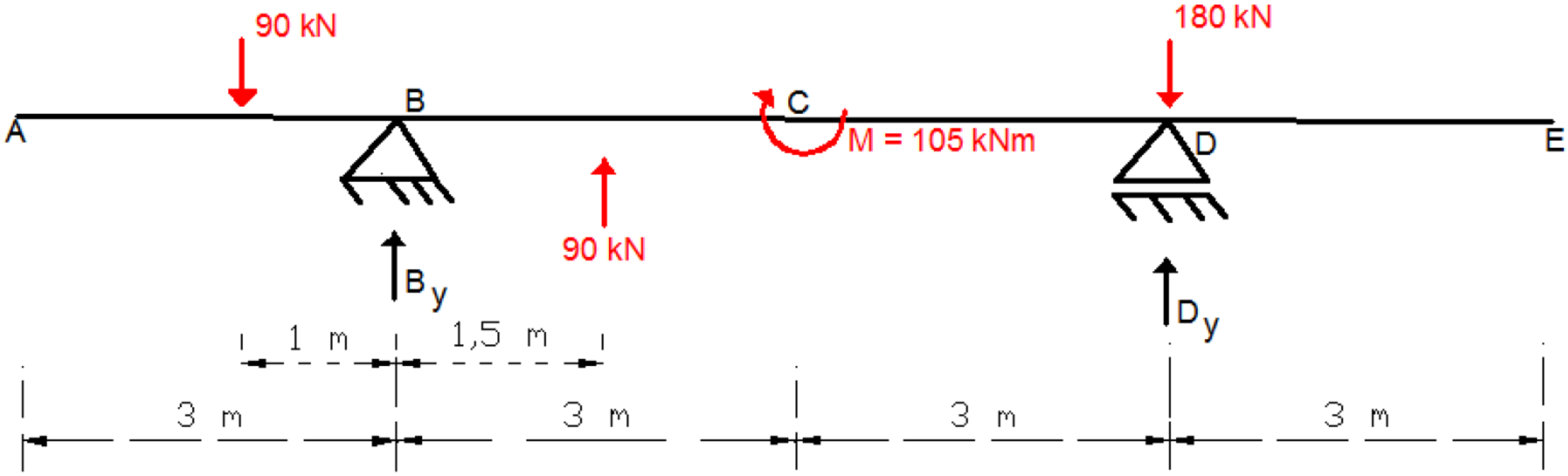
R3) Determinar as reações da viga a seguir.



***Exercício resolvido no Moodle:** Lista de exercícios de: reações e esforços solicitantes

Exemplo 7

R3) Determinar as reações da viga a seguir.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + D_y = 180$$

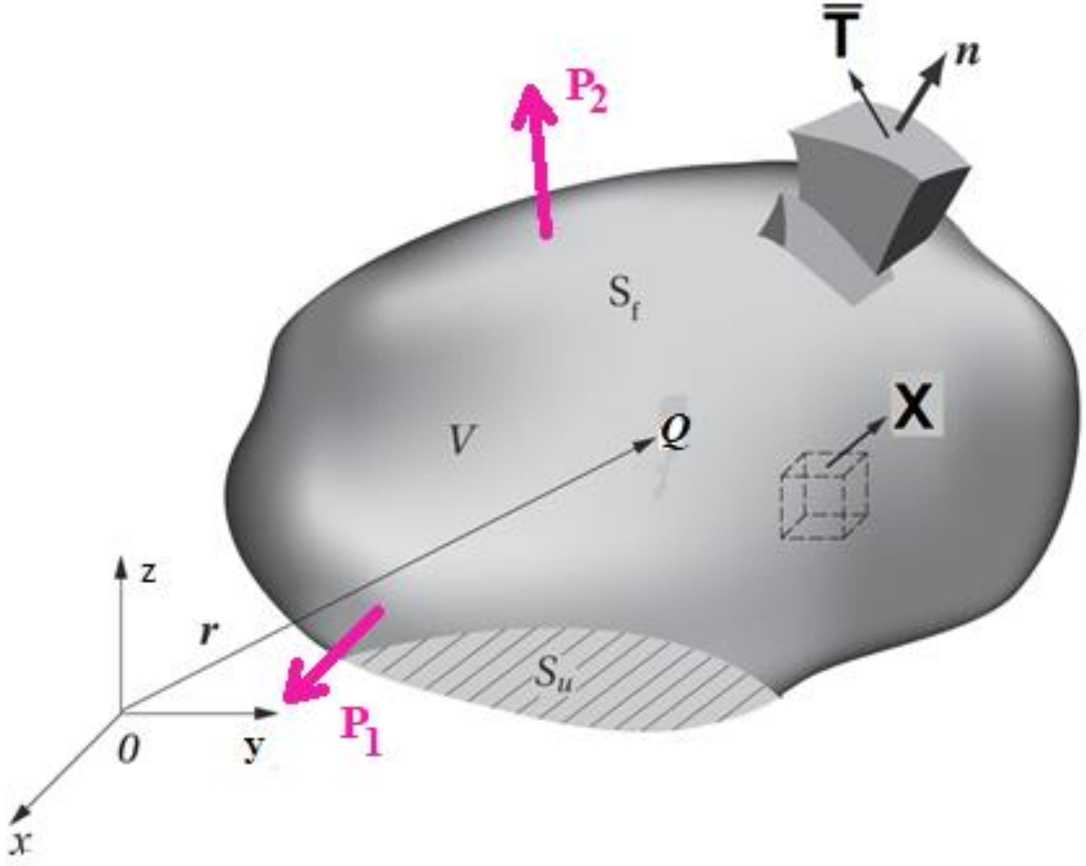
$$\sum M_B = 0 \rightarrow 6.D_y + 90.1 + 90.1{,}5 = 105 + 180.6 \rightarrow D_y = 160 \ kN(\uparrow)$$

$$\therefore B_y = 20 \ kN(\uparrow)$$

Tensão

Sólido deformável (V) em **equilíbrio estático**

Sujeito a forças de contato: P_1, P_2….



Realize um corte imaginário que passe dentro do corpo

Tensão

Corte imaginário

Vetor tensão em Q no plano de normal *n*

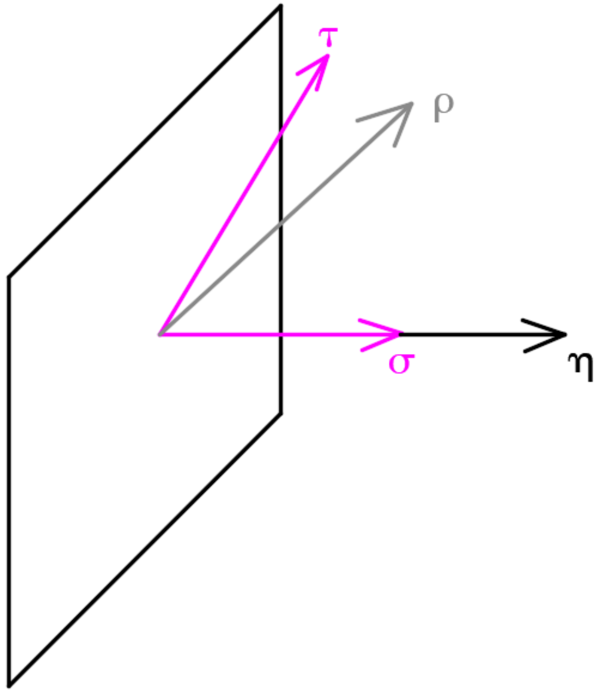
$$\rho_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

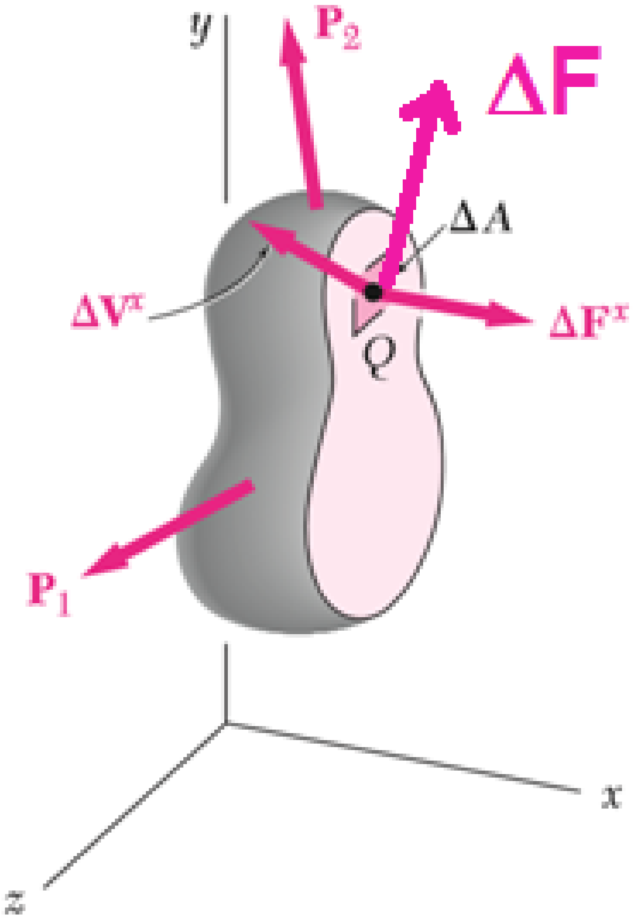
$$\rho_n = \sigma + \tau$$

σ: *tensão normal*

τ: *tensão cisalhante*

ΔA: área





Conhecer 3 tensões em Q: estado de tensão completamente determinado

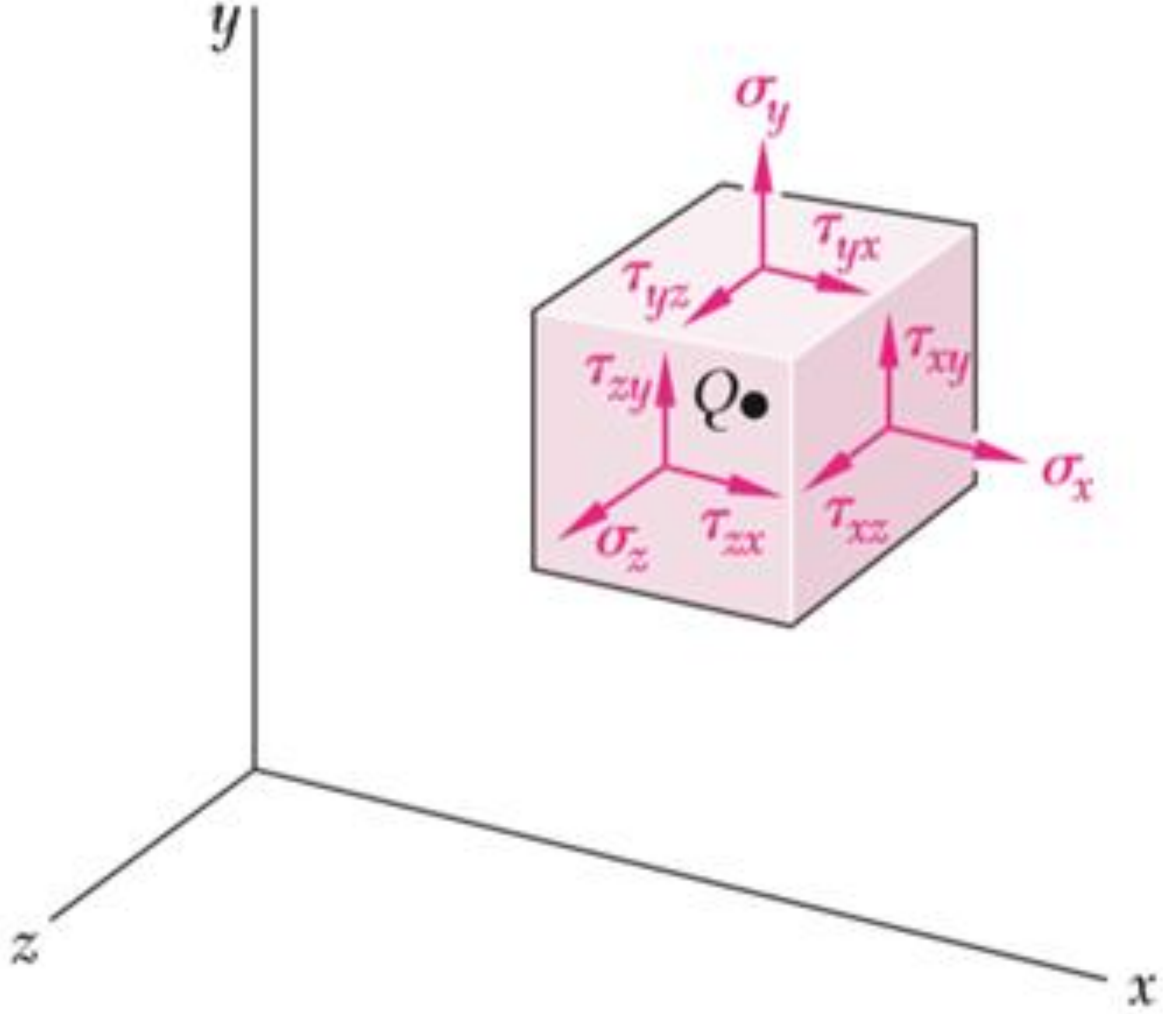
Tensão

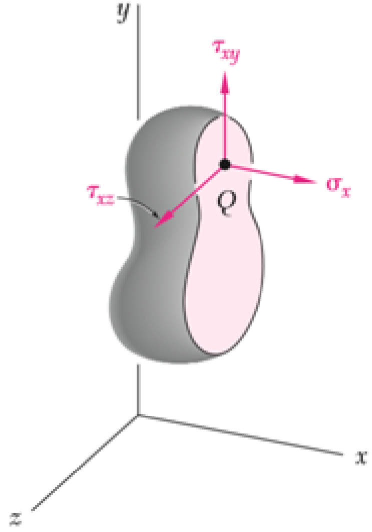
Decomposição do vetor tensão

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$





Estado tensional definidos nas **facetas paralelas** aos planos coordenados

Simetria de tensões

A combinação de forças geradas pela tensão devem satisfazer as condições para o equilíbrio:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

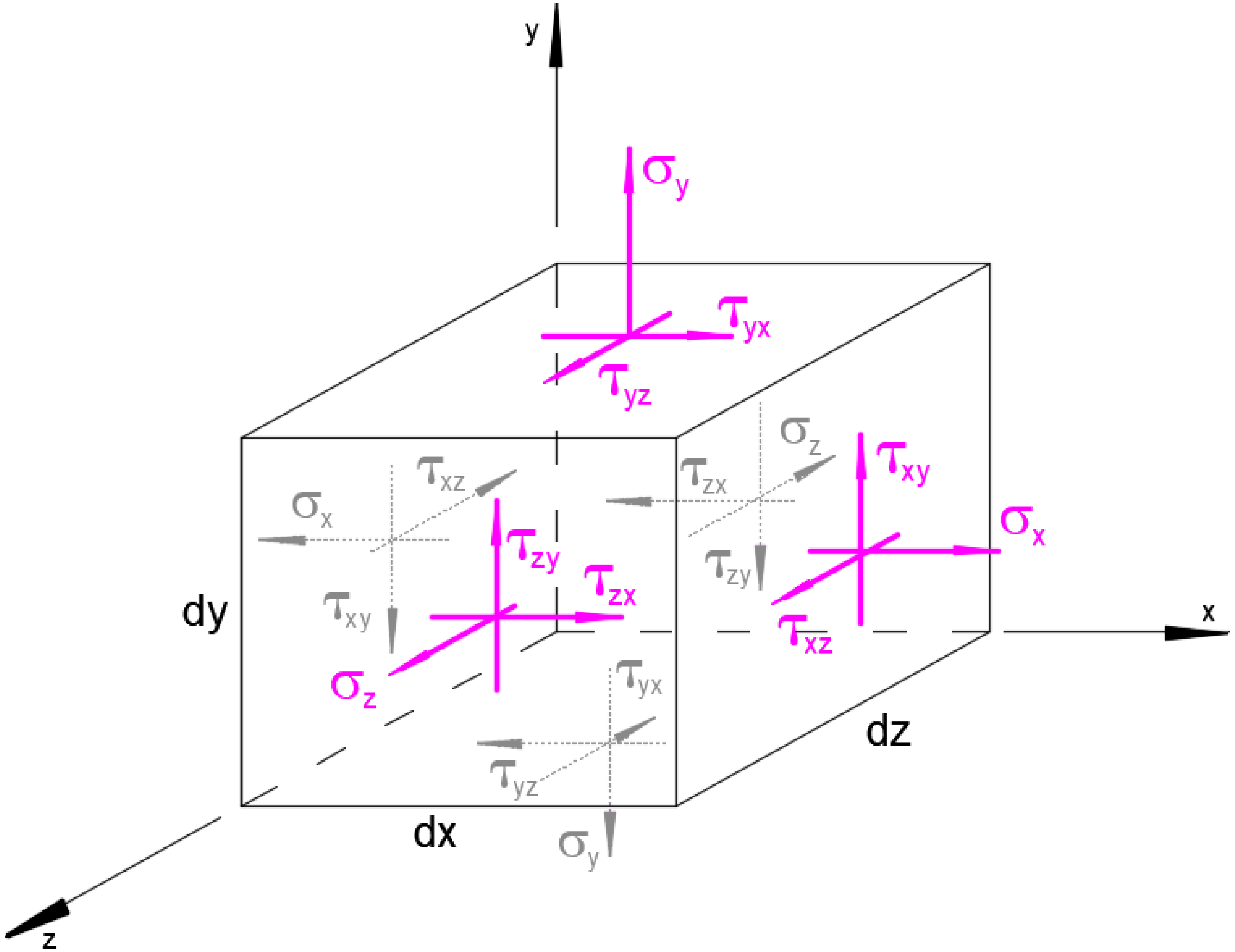
$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

Considere os momentos em torno do eixo z, pólo no centro do volume:

$$\sum M_z = 0 = (\tau_{xy} dydz)\, dx - (\tau_{yx} dxdz) dy$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Similar, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ e $\tau_{zx} = \tau_{xz}$



$$\boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

$$\boldsymbol{\tau_{zx} = \tau_{xz}}$$

Simetria de tensões cisalhamento

Notação das 6 tensões

Notação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T$$

Tensor das tensões de Cauchy (simétrico)

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} & \boldsymbol{\tau_{xy}} & \boldsymbol{\tau_{xz}} \\ \boldsymbol{\tau_{xy}} & \boldsymbol{\sigma_y} & \boldsymbol{\tau_{yz}} \\ \boldsymbol{\tau_{xz}} & \boldsymbol{\tau_{yz}} & \boldsymbol{\sigma_z} \end{bmatrix}$$

Às vezes é conveniente escrever na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]^T$$

Ou

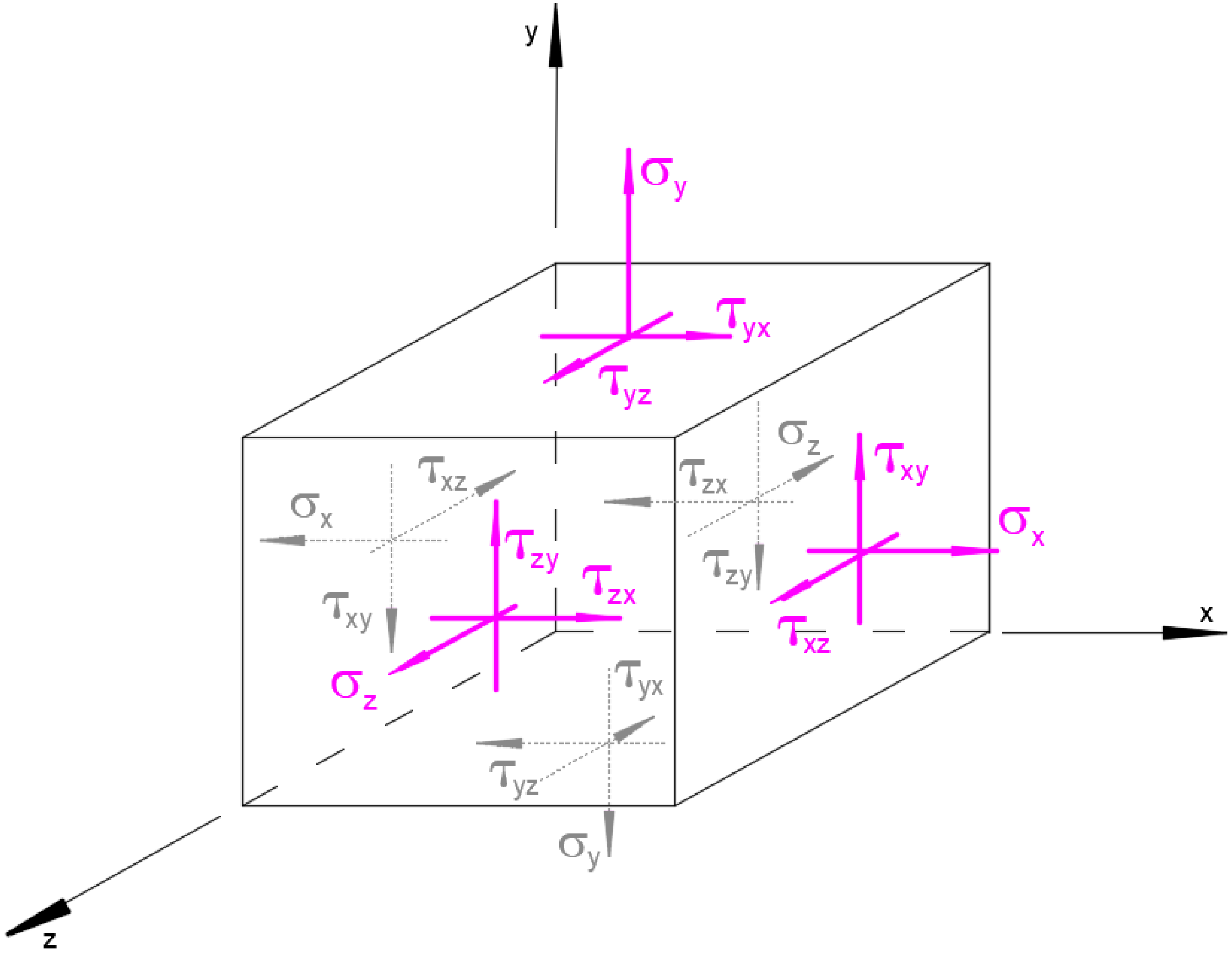
$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T$$

com x =1, y = 2 e z = 3

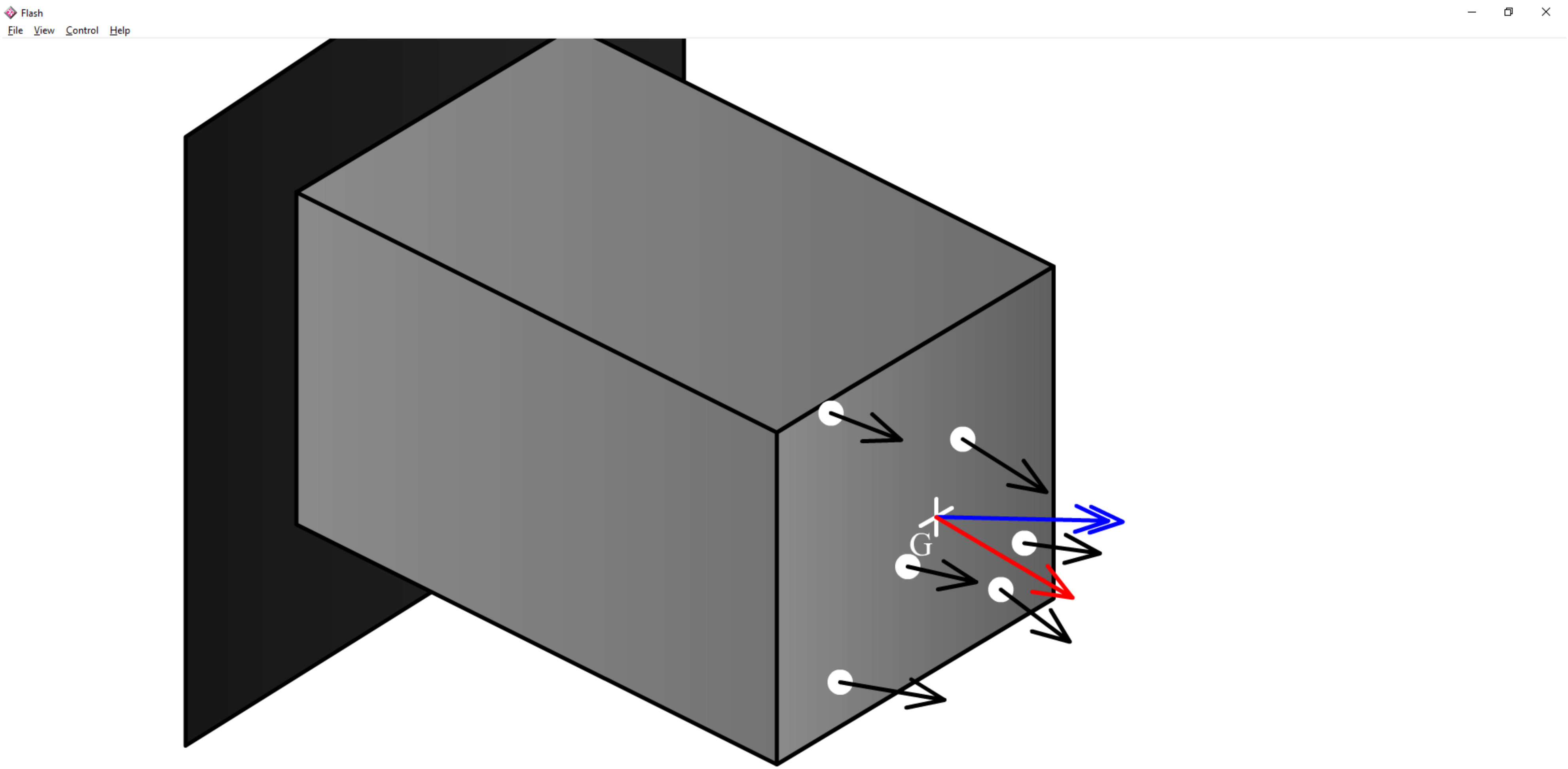
Sinal das componentes de tensão

A σ é positiva no sentido da normal à faceta

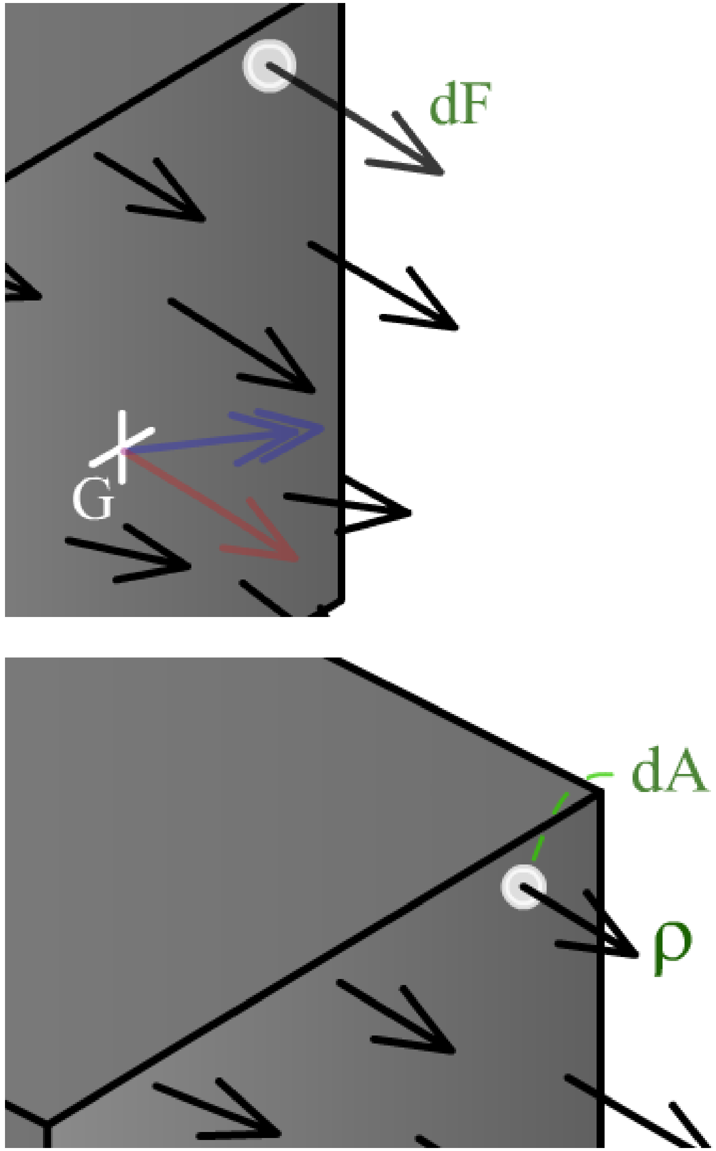
Se normal à faceta está no sentido do eixo, τ acompanha o seu sentido, caso contrário, sentido oposto.



TENSÕES E ESFORÇOS SOLICITANTES: ELEMENTOS LINEARES



Tensões no plano



Tensão: $$\vec{\rho} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

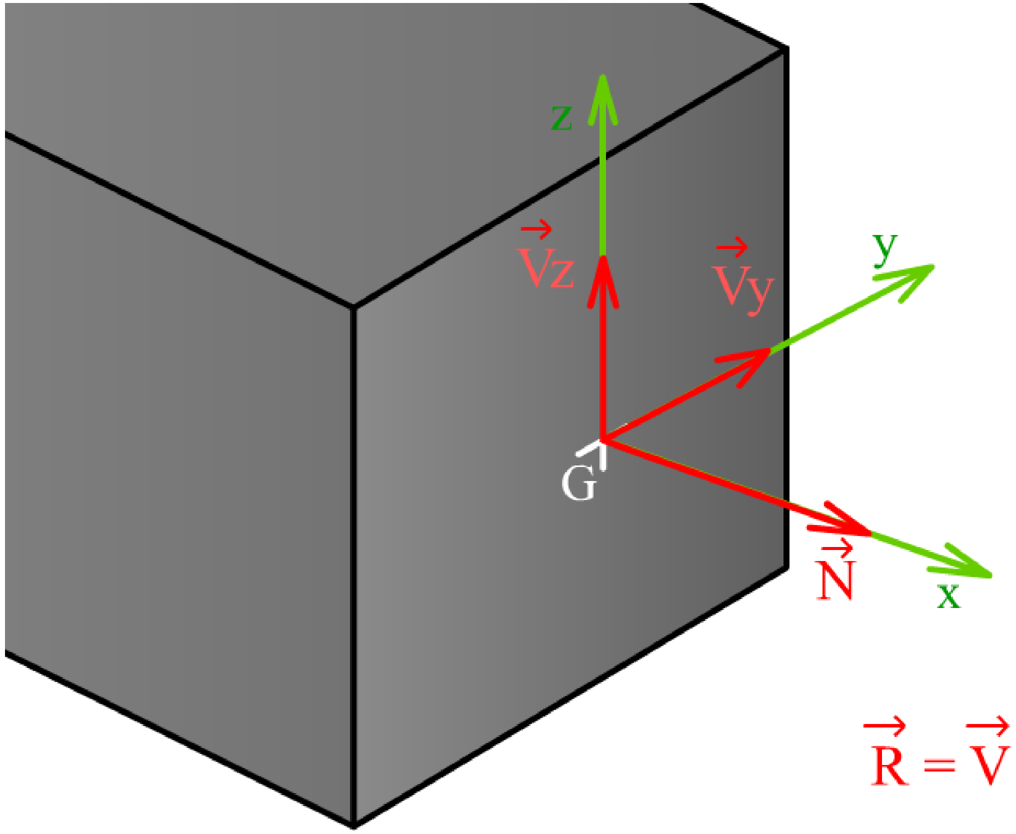
Tensão normal a seção: $\vec{\sigma}$

Tensão paralela a seção: $\vec{\tau}$

$$\vec{\rho}_{média} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta A}$$

ESFORÇOS SOLICITANTES

Esforços solicitantes: força/momento resultante das tensões transferidos para o centroide de cada seção transversal



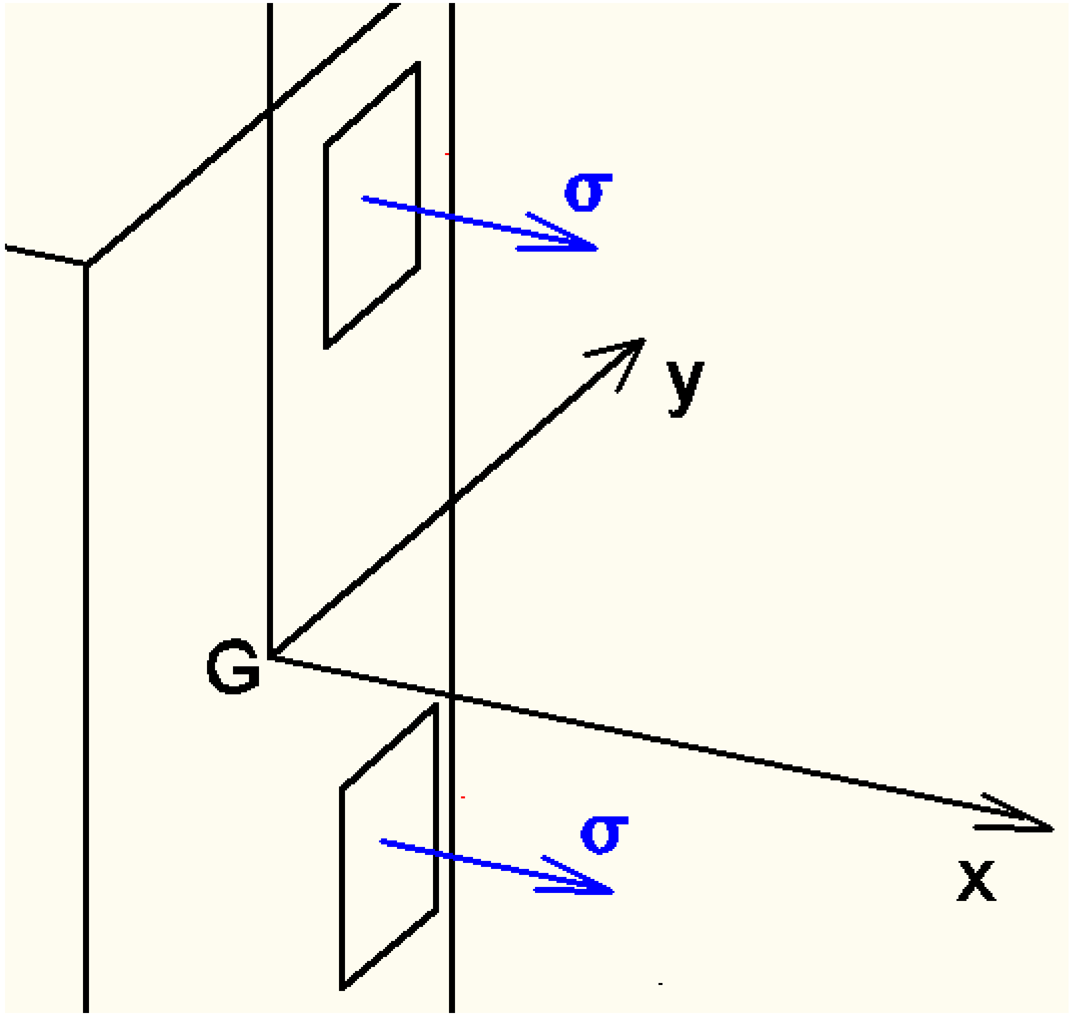
$$\vec{R} = \vec{V} + \vec{N}$$

$$\vec{V} = \vec{Vy} + \vec{Vz}$$

N: Esforço Normal

V: Esforço Cisalhante ou Cortante

ESFORÇO NORMAL

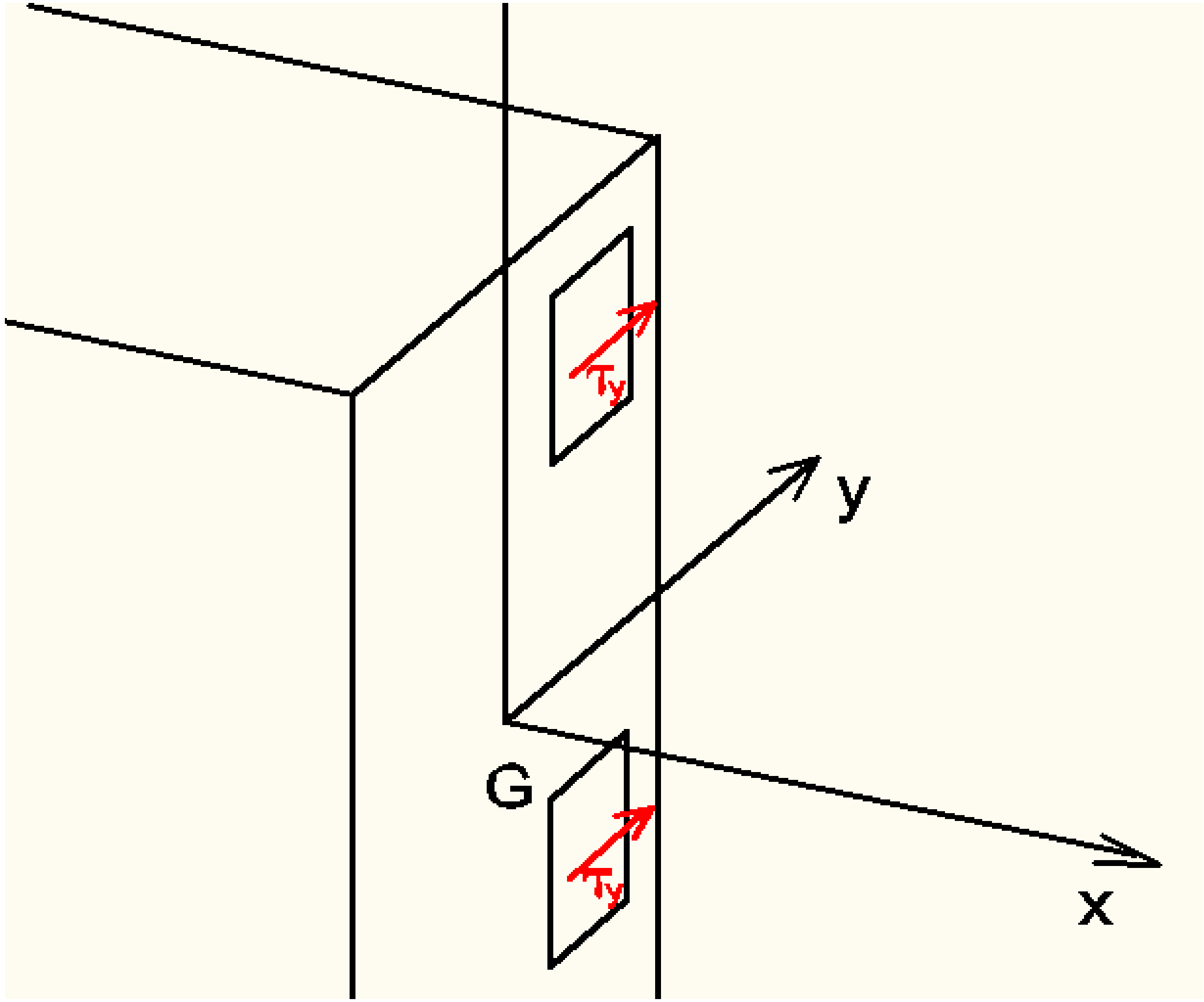


$$N = \int_A \sigma \, dA$$

N: ESFORÇO NORMAL

σ: TENSÃO NORMAL

ESFORÇO CISALHANTE (Cortante)

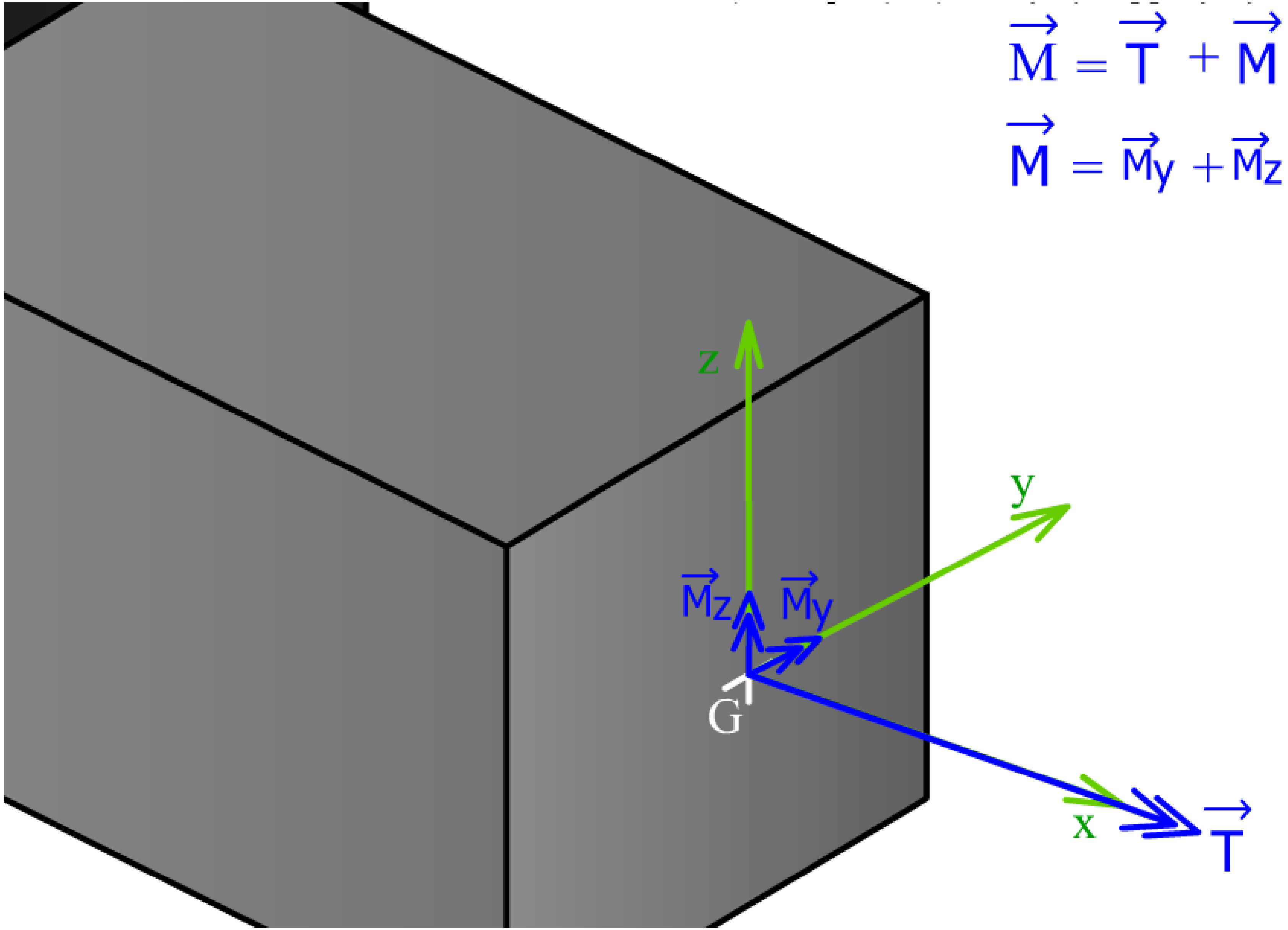


$$V_y = \int_A \tau_y \, dA$$

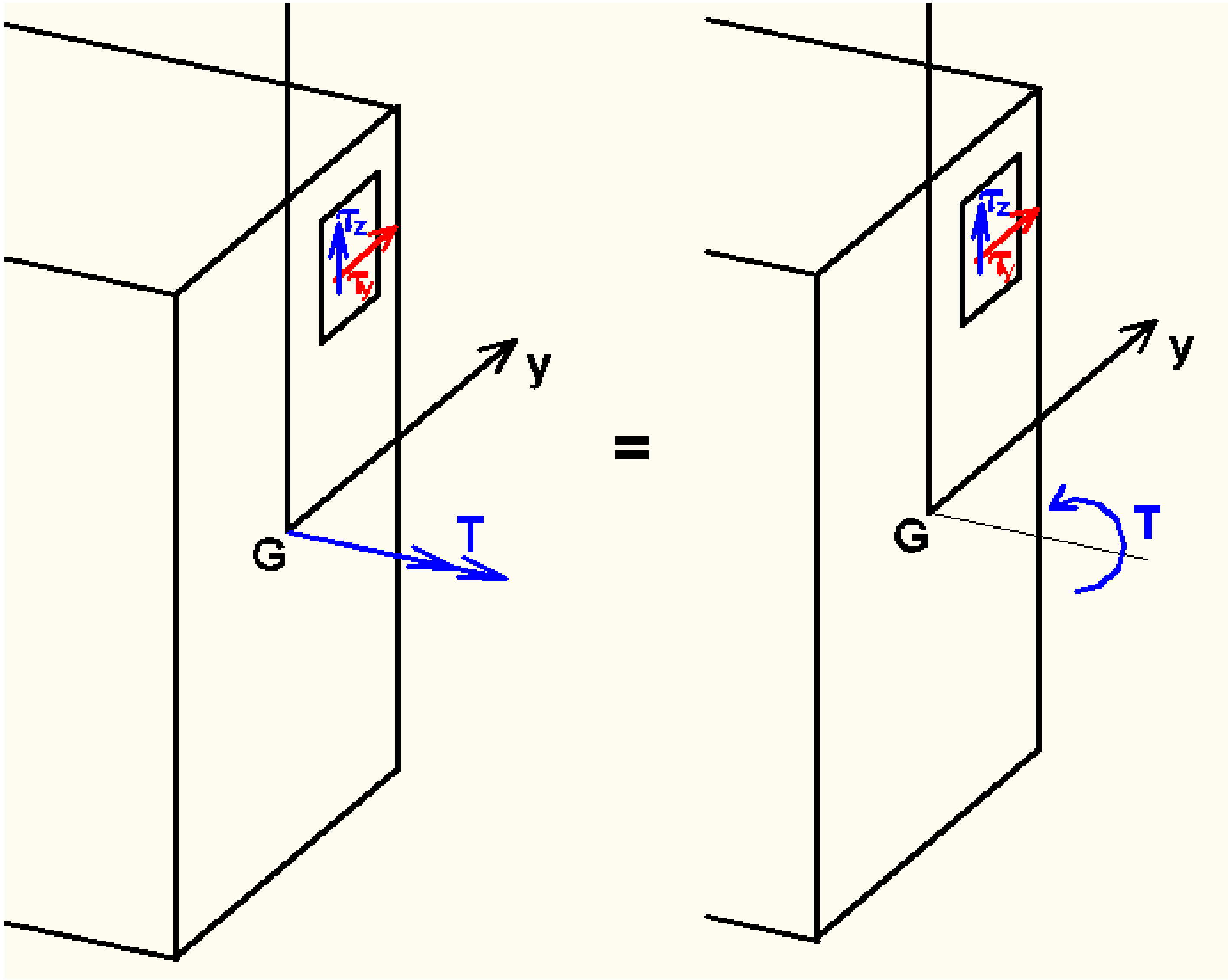
$$V_z = \int_A \tau_z \, dA$$

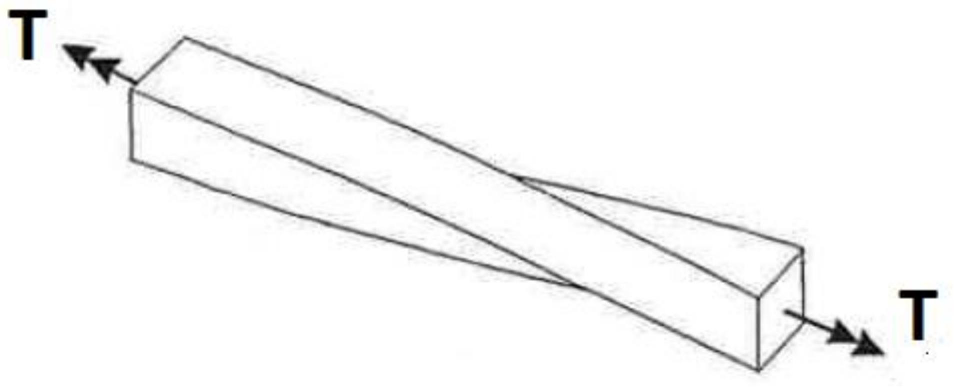
Tensão Cisalhante: τ

ESFORÇOS DE MOMENTO



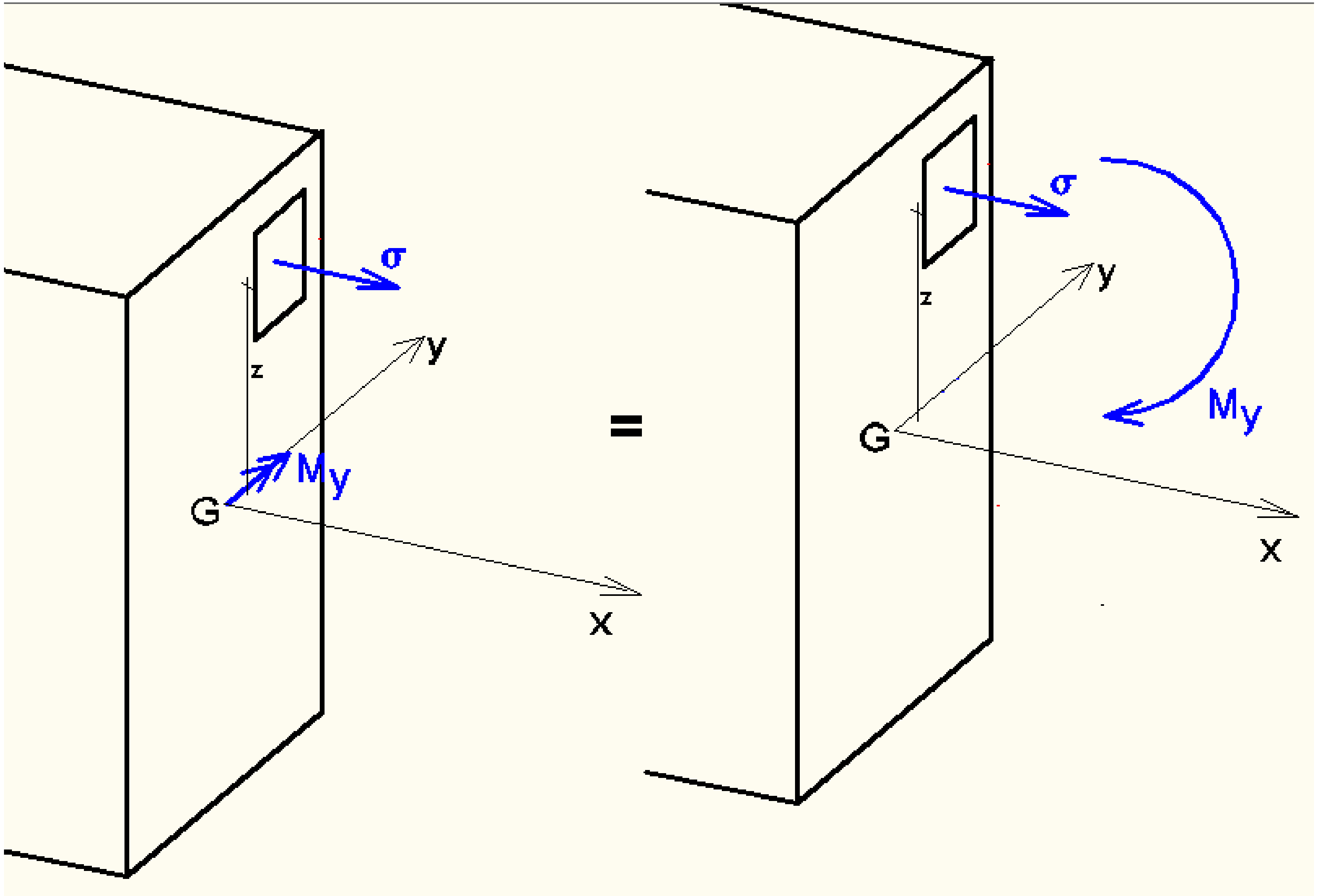
MOMENTO TORÇOR (T)





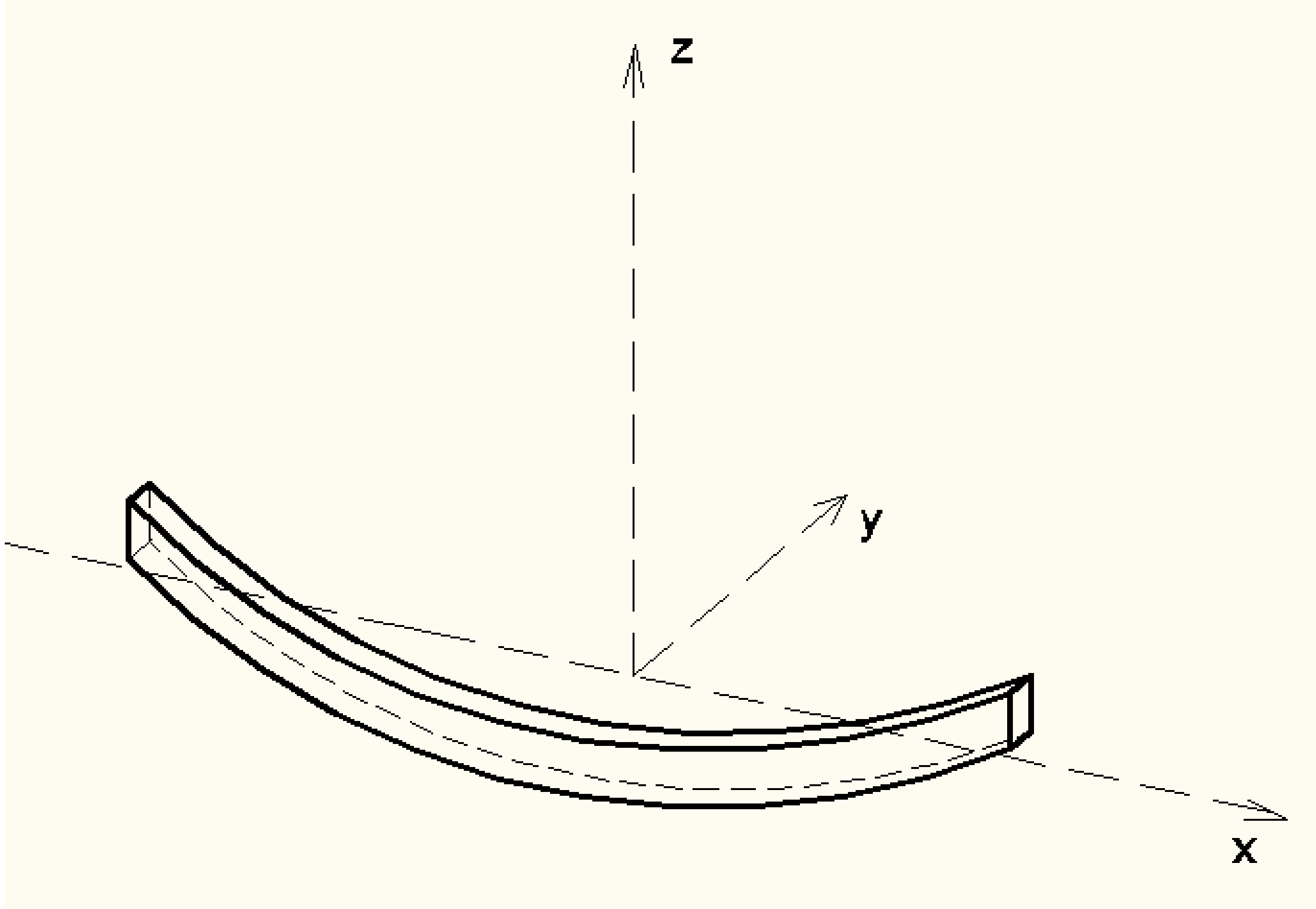
$$T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z \right) dA$$

MOMENTO FLETOR (My)

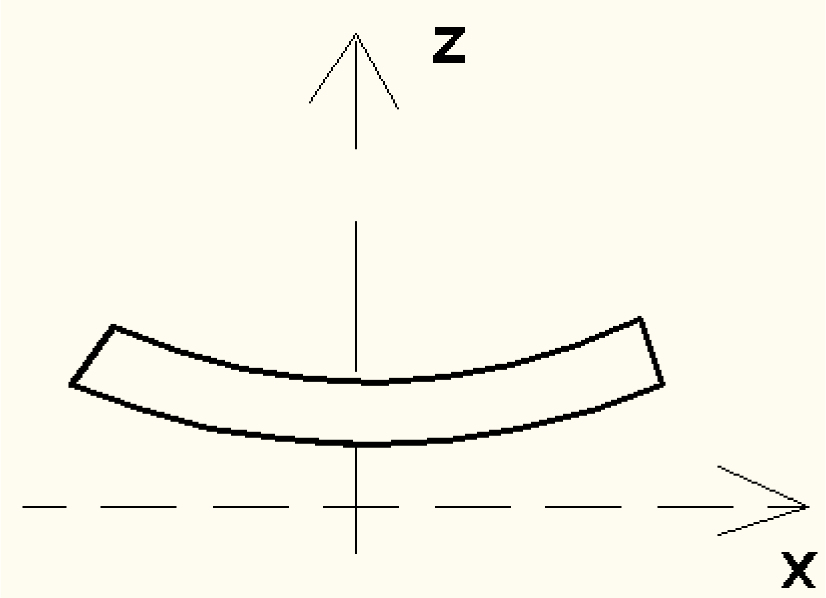


$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA$$

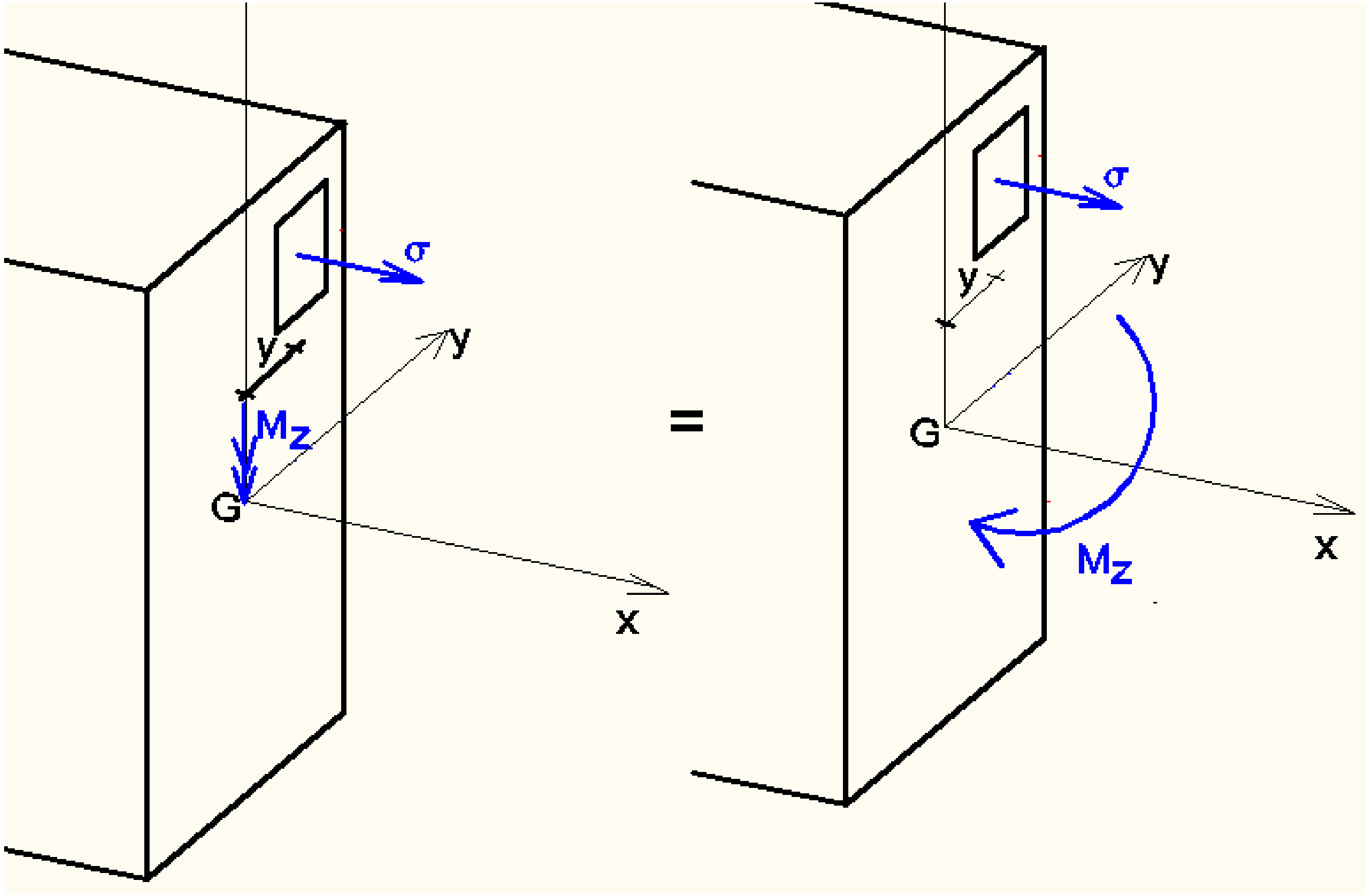
MOMENTO FLETOR (M_y)



Curvatura em
torno de y

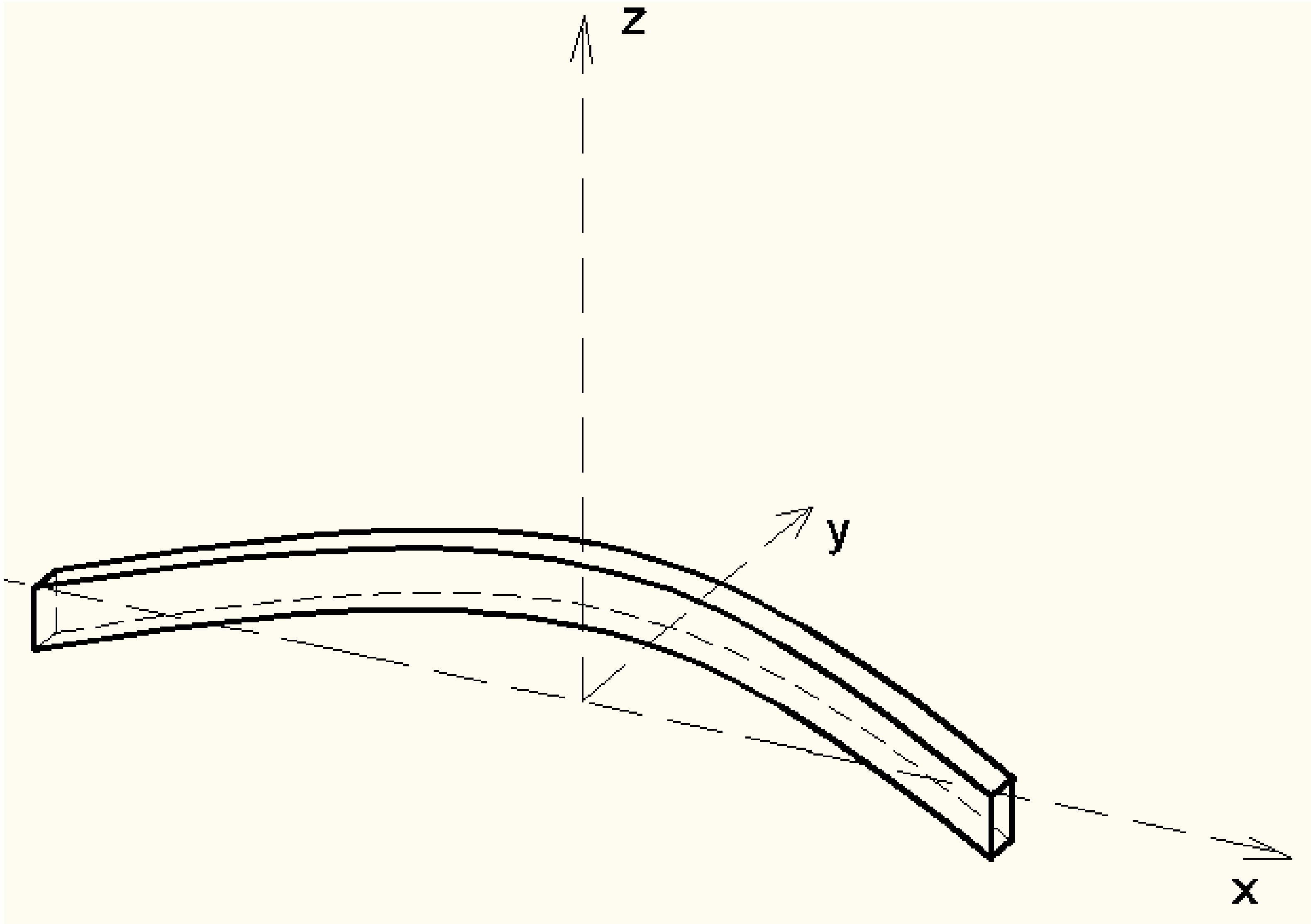


MOMENTO FLETOR (M_z)

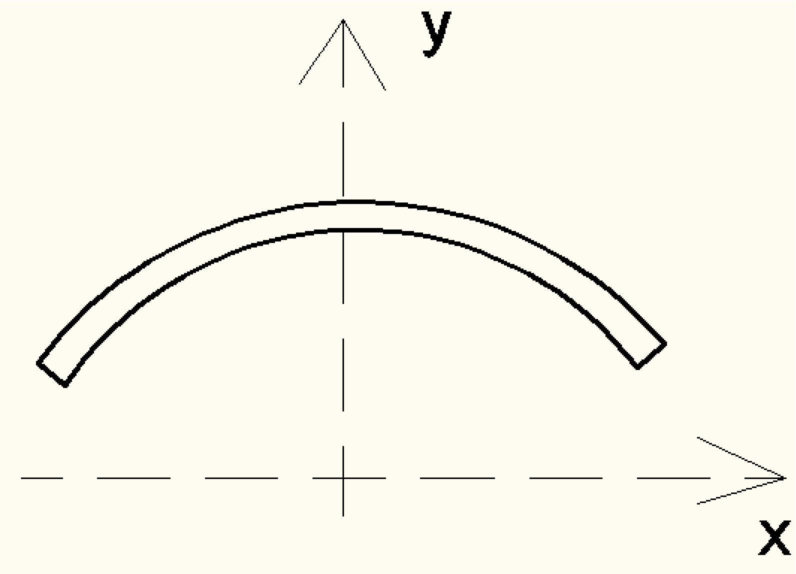


$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \; dA$$

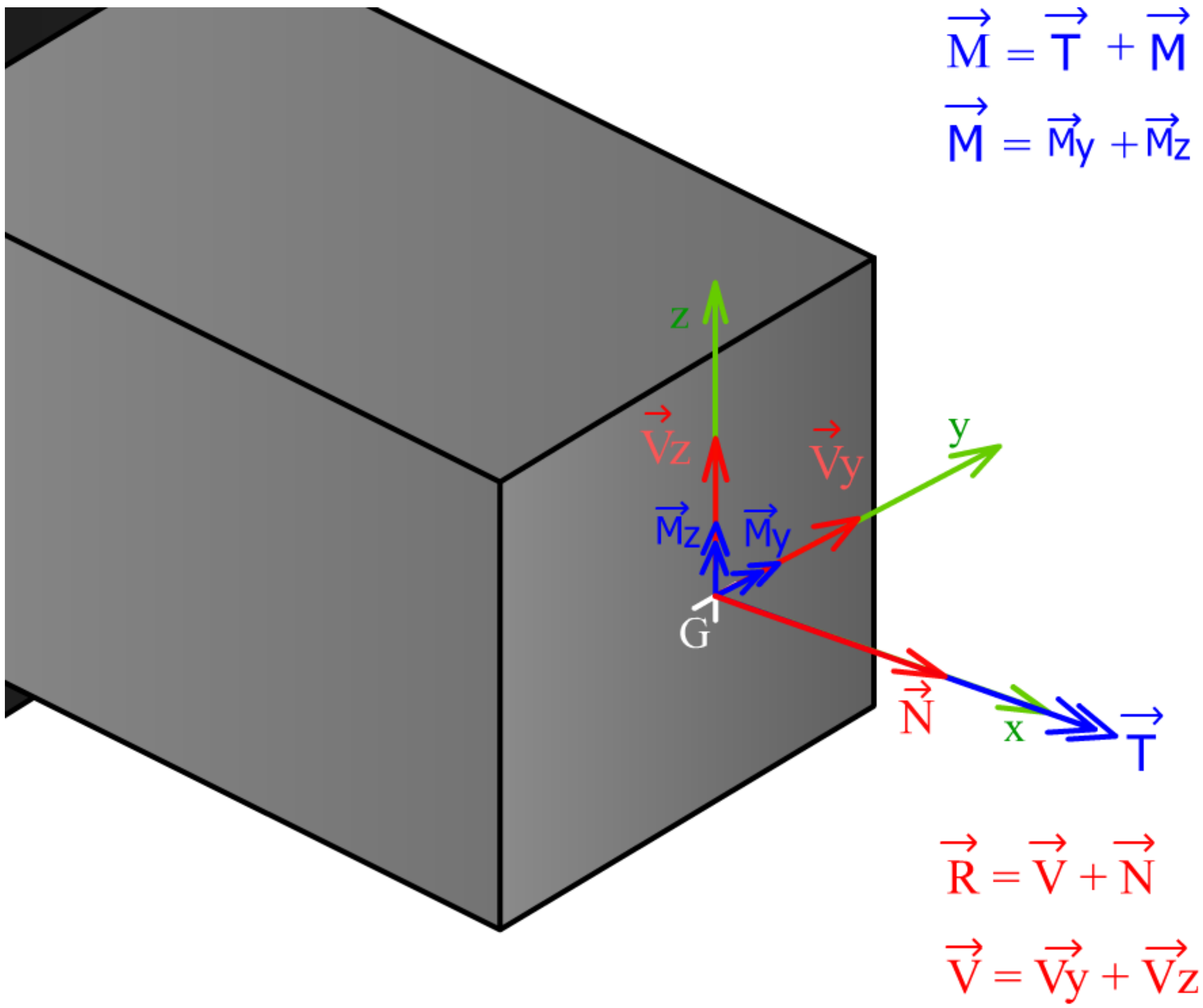
MOMENTO FLETOR (M_z)



Curvatura em torno de z



TOTAL DE ESFORÇOS (6)



$$
\begin{cases}
N = \int_A \sigma \, dA \\
V_y = \int_A \tau_y \, dA \\
V_z = \int_A \tau_z \, dA \\
M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA \\
M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA \\
T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z \right) dA
\end{cases}
$$