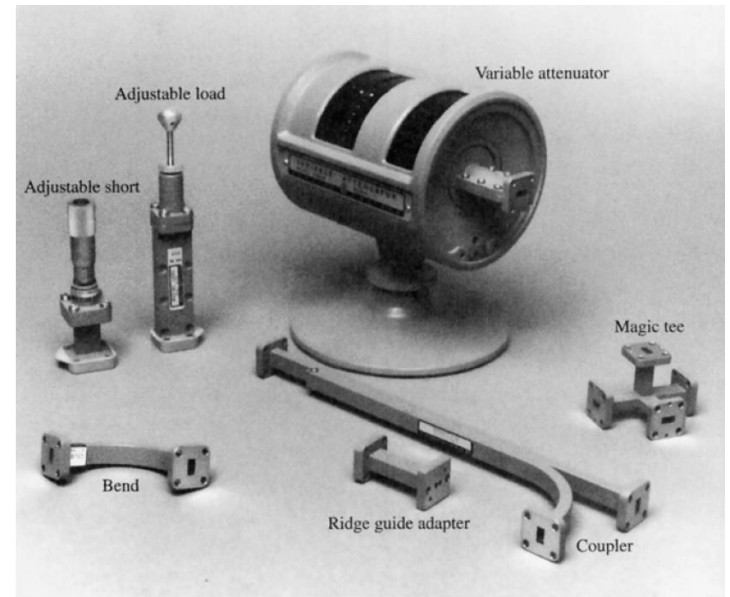
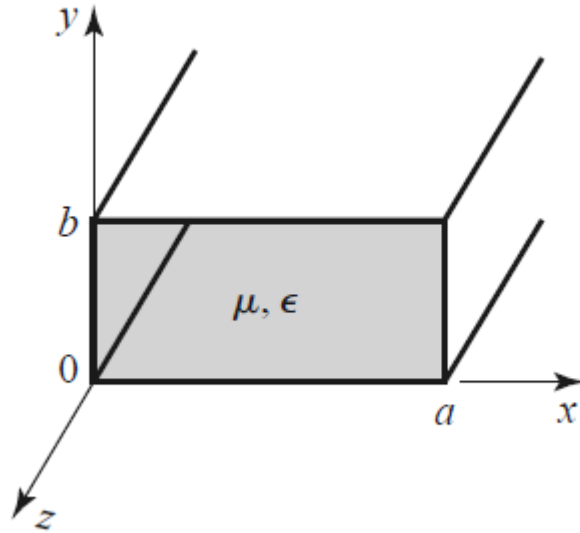


Guias de Onda Retangular

SEL 369 Micro-ondas

Tania Regina Tronco
Departamento de Engenharia Elétrica da EESC-USP

Guia de Onda Retangular – Modos TE e TM



Modo TE

Modos TE $\Rightarrow \mathbf{E}_z = 0$ e $\mathbf{H}_z \neq 0$

Com $H_z = H_z(x, y, z) = H_z(x, y)e^{-\gamma z}$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon H_z = 0$$

$$\cancel{e^{-\gamma z}} \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \cancel{e^{-\gamma z}} \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} + \gamma^2 \cancel{e^{-\gamma z}} H_z(x, y) + \omega^2 \mu \epsilon \cancel{e^{-\gamma z}} H_z(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z(x, y) = 0 \quad \text{(EDP)}$$

Resolvendo a EDP, obtém-se:

$$H_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right)$$

Com $\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 = \text{constante} = h^2$

- “m” e “n” são números naturais (0, 1, 2, ...)
- H_0 é uma constante.

Mas $H_z = H_z(x, y, z) = H_z(x, y) e^{-\gamma z} \Rightarrow H_z = H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_x = \frac{-1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right]$$

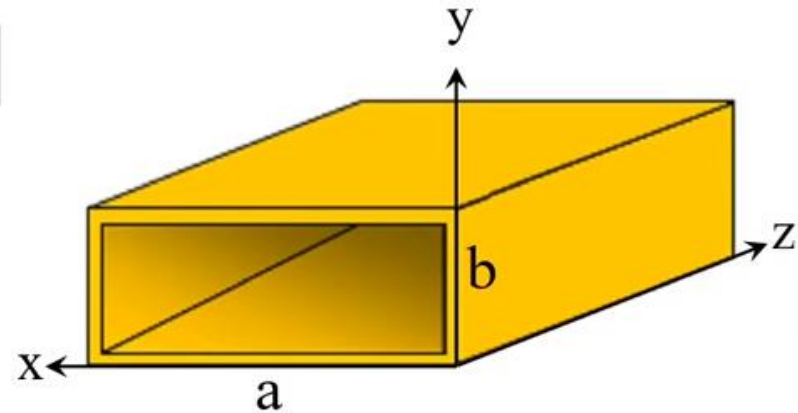
$$E_y = \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right]$$

$$H_x = \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right]$$

$$H_y = \frac{-1}{(\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon)} \left[j\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right]$$

Campos do modo TE: $E_z = 0$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$



$$E_x = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_x = \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_y = \frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

Cada par (m, n) define os diversos **modos de propagação**, os quais possuem diferentes configurações espaciais dos campos.

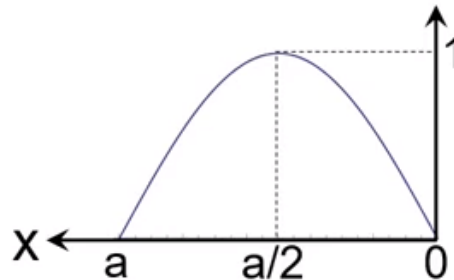
Notação: modos TE_{mn}

O modo TE_{00} não existe, pois não obedece às condições de contorno.

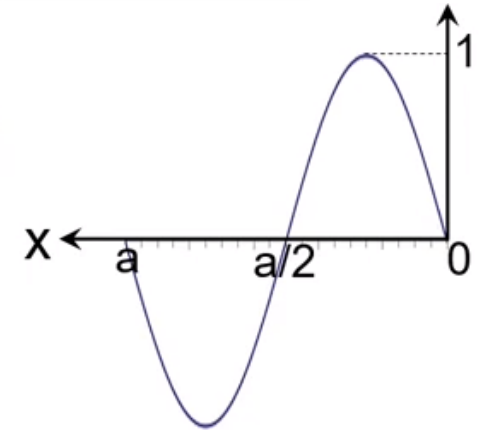
Interpretação de m e n:

$$\text{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right)$$

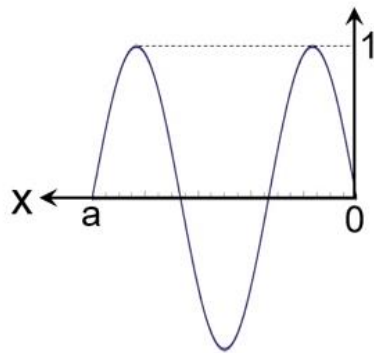
m = 1



m = 2



m = 3

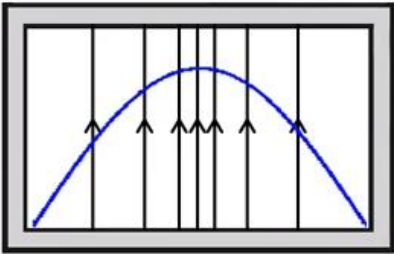


Conclusão:

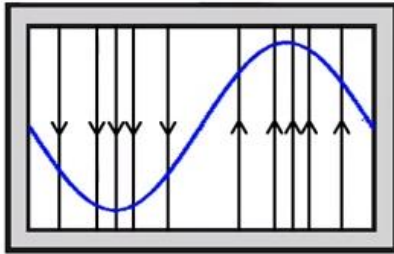
- “m” corresponde ao número de semiciclos de variação dos campos na direção x.
- “n” corresponde ao número de semiciclos de variação dos campos na direção y.

Configuração dos campos (modos TE):

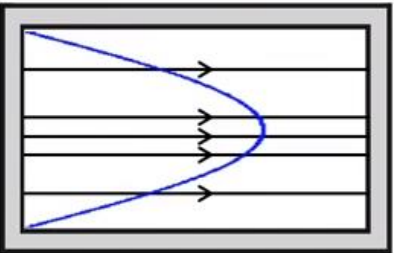
TE_{10}



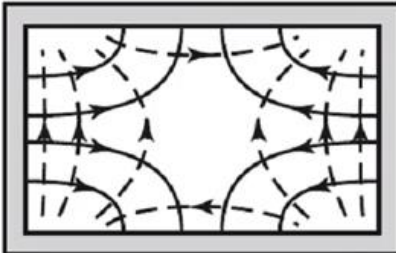
TE_{20}



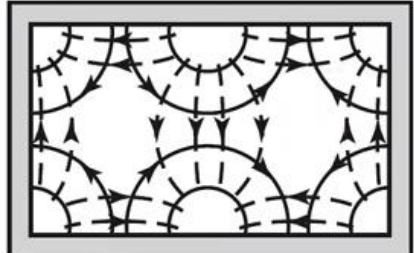
TE_{01}



TE_{11}



TE_{21}

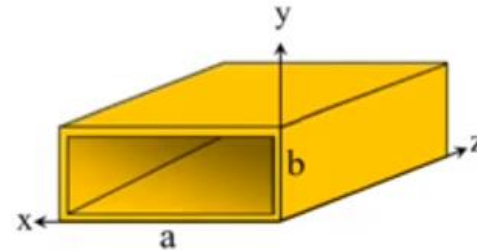


Modo TM

Modos TM no guia de onda retangular:

Modos TM $\Rightarrow \mathbf{E}_z \neq 0$ e $\mathbf{H}_z = 0$

Com $E_z = E_z(x, y, z) = E_z(x, y)e^{-\gamma z}$



$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon E_z = 0$$

$$e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + e^{-\gamma z} \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} + \gamma^2 e^{-\gamma z} E_z(x, y) + \omega^2 \mu \epsilon e^{-\gamma z} E_z(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z(x, y) = 0 \quad \text{(EDP)}$$

Método de separação de variáveis: $E_z(x, y) = A(x)B(y)$

Resolvendo a EDP, obtém-se: $E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right)$

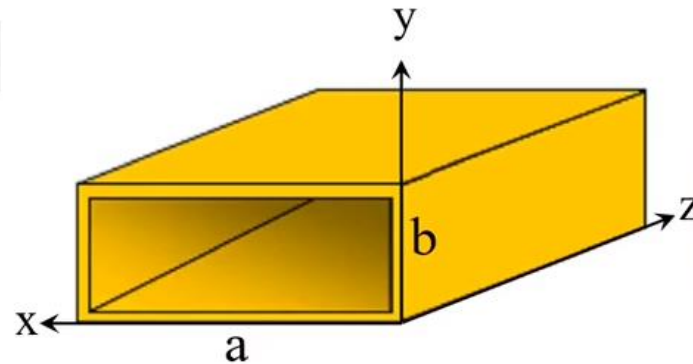
Com $\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 = \text{constante} = h^2$

- “m” e “n” são números naturais (0, 1, 2, ...)
- E_0 é uma constante.

Mas $E_z = E_z(x, y, z) = E_z(x, y)e^{-\gamma z} \Rightarrow E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$

Campos do modo TM: $H_z = 0$

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$



$$E_x = -\frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{h^2} \left(\frac{n \pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{n \pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{h^2} \left(\frac{m \pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right) e^{-\gamma z}$$

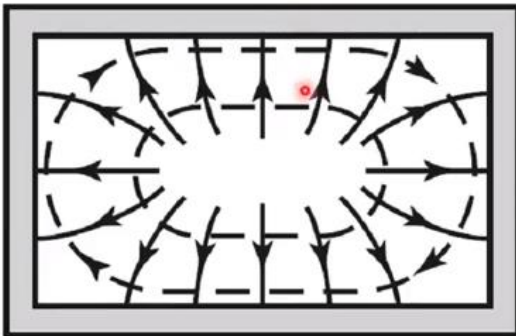
Notação: modos TM_{mn}

Os modos TM_{00} , TM_{m0} e TM_{0n} não existem, pois não obedecem às condições de contorno.

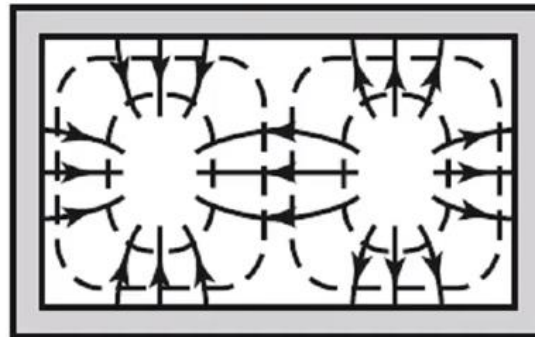
O primeiro modo válido é o TM_{11} .

Configuração dos campos (modos TM):

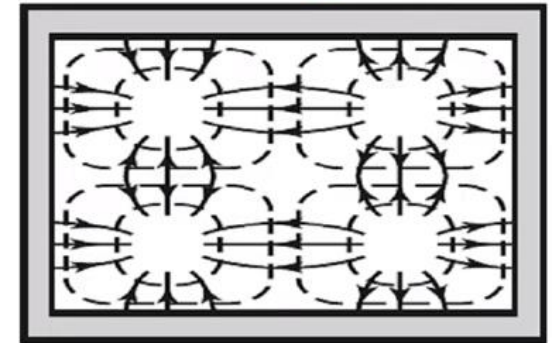
TM_{11}



TM_{21}



TM_{22}



Frequências de corte:

Para qualquer modo (TE ou TM), o vetor campo elétrico no guia é dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{-\gamma z}$$

O campo correspondente no domínio do tempo é:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \Re\left\{\vec{E}(x, y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}\right\}$$

Mas
$$\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

Caso 1: Propagação

$$\text{Se } \omega^2\mu\epsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow \gamma = j\beta \quad \alpha = 0 \quad \beta = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$\text{Assim: } \vec{E}(x, y, z, t) = \Re\left\{\vec{E}(x, y)e^{-j\beta z}e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y)\cos(\omega t - \beta z)$$

Neste caso, tem-se uma onda se propagando sem atenuação ao longo do guia (sem perdas).

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

v_f depende do modo e da frequência

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

Caso 2: Onda Evanescente

Se $\omega^2\mu\epsilon < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow \gamma = \alpha \quad \beta = 0 \quad \alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$

Assim: $\vec{E}(x, y, z, t) = \Re\{\vec{E}(x, y)e^{-\alpha z}e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y)e^{-\alpha z}\cos(\omega t)$

- Neste caso, não há propagação. Para esses modos, chamados **evanescentes**, o campo se atenua muito rapidamente com a distância.
- A forte atenuação não é devida a perdas, mas sim à impossibilidade dos campos de obedecer às condições de contorno na frequência de operação.
- A energia associada às ondas evanescentes é puramente reativa.

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

Caso 3: Corte

$$\text{Se } \omega^2\mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0 \quad \alpha = \beta = 0$$

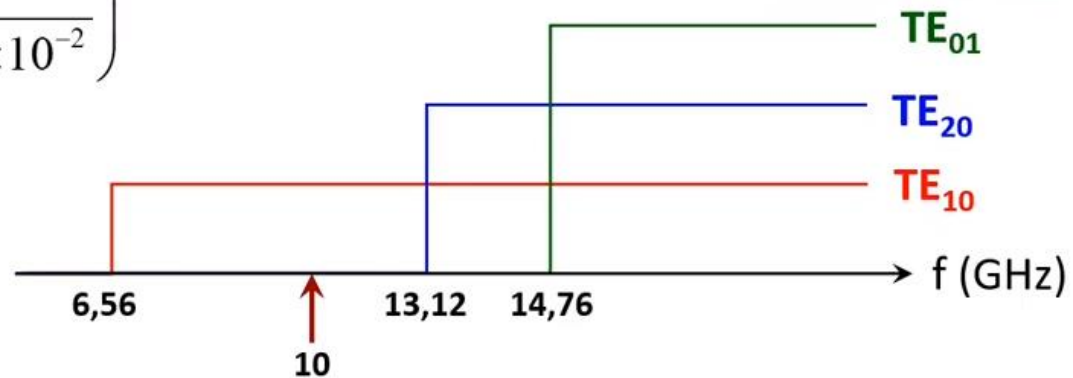
- Este caso corresponde ao limite de transição entre os dois casos anteriores.
- A frequência na qual isso ocorre é chamada **frequência de corte** (f_c) e é dada por:

$$(2\pi f_c)^2 \mu\epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Exercício 1: Calcular a frequência de corte dos oito primeiros modos do guia WR90, que tem $a = 2,286$ cm, $b = 1,016$ cm e é preenchido com ar. Qual (is) modo(s) se propaga(m) em $f = 10$ GHz?

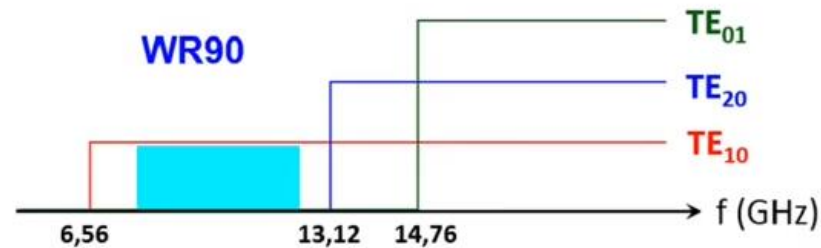
$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{2,286 \times 10^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{n}{1,016 \times 10^{-2}}\right)^2}$$

modo	m	n	f_c (GHz)
TE	1	0	6,56
TE	2	0	13,12
TE	0	1	14,76
TE, TM	1	1	16,15
TE	3	0	19,68
TE, TM	2	1	19,74



- Em 10 GHz, somente o modo TE_{10} se propaga.
- Este modo, que tem a mais baixa frequência de corte, é chamado **modo dominante** do guia.

Na maior parte das aplicações práticas, as dimensões do guia são projetadas tal que somente o modo dominante se propague na frequência de operação.



WR DESIGNATION	STANDARD FREQ RANGE GHZ	INSIDE DIMENSIONS (INCHES)
WR340	2.20 - 3.30	3.400 x 1.700
WR284	2.60 - 3.95	2.840 x 1.340
WR229	3.30 - 4.90	2.290 x 1.150
WR187	3.95 - 5.85	1.872 x 0.872
WR159	4.90 - 7.05	1.590 x 0.795
WR137	5.85 - 8.20	1.372 x 0.622
WR112	7.05 - 10.00	1.122 x 0.497
WR90	8.2 - 12.4	0.900 x 0.400
WR75	10.0 - 15.0	0.750 x 0.375
WR62	12.4 - 18.0	0.622 x 0.311
WR51	15.0 - 22.0	0.510 x 0.255
WR42	18.0 - 26.5	0.420 x 0.170

Escolha comum: $a = 2b$

Exercício para casa

Exercício 2: O guia de onda WR340 é preenchido com ar e tem dimensões $8,636 \text{ cm} \times 4,318 \text{ cm}$. Para o modo TE_{10} , calcular:

a) a frequência de corte;