

ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À QUINTA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang.

Exercício 1. (Seção 2.4, Problema 3) Ache a dimensão e uma base para os quatro subespaços fundamentais de A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2. (Seção 2.4, Problema 23). Suponha que $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ seja inversível. Escreva bases para os quatro subespaços de A e as bases para os quatro subespaços fundamentais da matriz 3 por 6 dada por $B = [A \ A]$.

Exercício 3. (Seção 2.4, Problema 25) Quais subespaços fundamentais são os mesmos para as matrizes dos itens a e b? Prove que todas as matrizes abaixo tem mesmo posto.

- a) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$.
- b) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$.

Exercício 4. (Seção 2.4, Problema 29) Sem calcular A , ache bases para os quatro subespaços fundamentais abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5. (Seção 2.6, Problema 7) . No espaço dos polinômio de grau ≤ 3 , denotado por $\mathcal{P}_3$, qual é a matriz que representa $\frac{d^2}{dt^2}$ na base canônica $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Ache o espaço nulo e o espaço coluna dessa matriz. O que eles significam em termos dos polinômios?

Exercício 6. (Seção 3.1, Problema 11) O teorema fundamental é frequentemente enunciado na forma da alternativa de Fredholm: Para qualquer A e b , um e somente um dos sistemas abaixo tem solução:

- i) $Ax = b$.
ii) $A^T y = 0$ e $y^T b \neq 0$;

Ou b está no espaço coluna $C(A)$ ou existe um $y \in N(A^T)$ tal que $y^T b \neq 0$. Mostre que não é possível que i) e ii) tenham soluções para um mesmo b .

Exercício 7. (Seção 3.1, Problema 20) Seja S um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Explique o que quer dizer $(S^\perp)^\perp = S$ e porque isto é verdade.

Exercício 8. (Seção 3.1, Problema 22) Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ que contém todos os vetores com $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Ache uma base para $S^\perp$ contendo todos os vetores ortogonais a S .

Exercício 9. (Seção 3.2, Problema 9) Seja $P = \frac{aa^T}{a^T a}$, em que $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $P^2 = P$.

Exercício 10. (Seção 3.2, Problema 19) Ache a matriz de projeção $P = \frac{aa^T}{a^T a}$ para $a = (1, 1, 1)$ e $a = (-1, -3, -1)$. Verifique que $P^2 = P$. Ache a projeção de $b = (1, 2, 2)$ no subespaço gerado por $a = (1, 1, 1)$ usando a matriz obtida.