

Álgebra Linear e Aplicações

- *Bases dos espaços fundamentais,
Teorema fundamental da álgebra linear Parte 1,
Transformações lineares.*



BASES DOS ESPAÇOS FUNDAMENTAIS

BASE DE $C(A^T)$

PROPOSIÇÃO: SE $A \sim B$, ENTÃO $C(A^T) = C(B^T)$.

DEMO: BASTA OBSERVAR QUE O ESPAÇO LINHA NÃO MUDA APÓS UMA TRANSFORMAÇÃO ELEMENTAR.

SEJA $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$, L_j LINHA j DE A . LOGO $\rightarrow [u_1, \dots, u_m]$ DENOTA O ESPAÇO GERADO POR $u_1, \dots, u_m$

i) TROCA DE LINHAS $[L_1, \dots, L_{i-1}, L_j, \dots, L_i, \dots, L_m] = [L_1, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_m]$ ÓBVIO.

ii) $[L_1, \dots, \lambda L_j, \dots, L_m] = [L_1, \dots, L_j, \dots, L_m]$, $\forall \lambda \neq 0$, POIS

$$\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_j L_j + \dots + \alpha_m L_m = \alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_j (\lambda L_j) + \dots + \alpha_m L_m$$

iii) $[L_1, \dots, L_j + \lambda L_i, \dots, L_m] = [L_1, \dots, L_j, \dots, L_m]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, POIS

$$\alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_j L_j + \dots + \alpha_m L_m = \alpha_1 L_1 + \dots + (\alpha_i - \lambda \alpha_j) L_i + \dots + \alpha_j (L_j + \lambda L_i) + \dots + \alpha_m L_m$$

APLICAÇÃO: SE $A \sim B$, B ESTÁ NA FORMA ESCALONADA, ENTÃO AS LINHAS NÃO NULAS DE B FORMAM UMA BASE DE $C(A^T)$.

DEMO: SEJA $B = \begin{bmatrix} 0 \dots 0 B_{1\pi_1} \dots B_{1\pi_p} \\ 0 \dots 0 B_{2\pi_2} \dots B_{2\pi_p} \\ \vdots \\ 0 \dots 0 B_{p\pi_p} \dots B_{p\pi_p} \\ 0 \dots 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \dots 0 \end{bmatrix}$ $\pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_p$
 $B_{i\pi_j} \neq 0, \forall j \in \{1, \dots, p\}$

É CLARO QUE $B = \{L_{B_1}, \dots, L_{B_p}\}$ GERA $C(B^T) = C(A^T)$ BASTA MOSTRAR QUE B É L.I. DE FATO,

$$\alpha_1 (0 \dots 0 B_{1\pi_1} \dots B_{1\pi_p}) + \alpha_2 (0 \dots 0 B_{2\pi_2} \dots B_{2\pi_p}) + \dots + \alpha_p (0 \dots 0 B_{p\pi_p} \dots B_{p\pi_p}) = (0 \dots 0)$$

$$\Leftrightarrow (0 \dots 0 \alpha_1 B_{1\pi_1} \dots \alpha_1 B_{1\pi_2} + \alpha_2 B_{2\pi_2} \dots \alpha_1 B_{1\pi_3} + \alpha_2 B_{2\pi_3} + \alpha_3 B_{3\pi_3} \dots) = (0 \dots 0)$$

$$\text{Logo } \alpha_1 B_{1\pi_1} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 B_{1\pi_2} + \alpha_2 B_{2\pi_2} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 B_{1\pi_k} + \alpha_2 B_{2\pi_k} + \dots + \alpha_k B_{k\pi_k} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ BASE DE $C(A^T)$
 $B = \{(1, 3, 0, -1), (0, 0, 1, 1)\}$

COROLÁRIO: SEJA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ E $A \sim B$ E $A \sim C$. SUPONHA QUE B TENHA p_1 PIVÔS E C TENHA p_2 PIVÔS. PORTANTO, $\dim C(A^T) = p_1 = p_2$.

DEMO: VIMOS QUE AS LINHAS NÃO NULAS DE B E C FORMAM BASES DE $C(A^T)$.

COMO B TEM p_1 LINHAS NÃO NULAS E C TEM p_2 LINHAS NÃO NULAS, CONCLUÍMOS QUE AS BASES TÊM p_1 E p_2 ELEMENTOS.

TODA BASE TEM O MESMO NÚMERO DE ELEMENTOS. LOGO $\dim C(A^T) = p_1 = p_2$ ■

DEFINIÇÃO: DADO $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. DIZEMOS QUE A TEM p PIVÔS SE TODA MATRIZ ESCALONADA EQUIVALENTE A A TEM p PIVÔS. COMO VIMOS ANTERIORMENTE, TODAS ESSAS MATRIZES TÊM O MESMO NÚMERO DE PIVÔS.

BASE DE $N(A)$

JÁ SABEMOS QUE

- 1) SE $A \sim B$, ENTÃO $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\} = N(B)$
- 2) SE $A \sim B$, B ESTÁ NA FORMA ESCALONADA, ENTÃO AS SOLUÇÕES QUE CORRESPONDEM ÀS VARIÁVEIS LIVRES GERAM O ESPAÇO $N(A)$. (VEJA AULA 5).

PROPOSIÇÃO: SEJA B O CONJUNTO DAS SOLUÇÕES QUE CORRESPONDEM ÀS VARIÁVEIS LIVRES DE B (COMO EM 2). LOGO B É UMA BASE DE $N(A)$. LOGO $\dim N(A) = n - p$, p NÚMERO DE PIVÔS DE A .

DEMO: BASTA MOSTRAR QUE B É L.I. SEJA $B = \{x^{(j_1)}, \dots, x^{(j_{n-p})}\}$ AS SOLUÇÕES QUE CORRESPONDEM ÀS VARIÁVEIS LIVRES $j_1, \dots, j_{n-p}$. LOGO

$$\alpha_1 x^{(j_1)} + \dots + \alpha_{n-p} x^{(j_{n-p})} = (\underbrace{\alpha_1}_{\text{posição } j_1}, \dots, \underbrace{\alpha_p}_{\text{posição } j_p}, \underbrace{\alpha_{p+1}}_{\text{posição } j_{p+1}}, \dots, \underbrace{\alpha_{n-p}}_{\text{posição } j_{n-p}}) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-p} = 0$$

EXEMPLO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ BASE DE $N(A)$
 $B = \{(1, 0, -1, 1), (-3, 1, 0, 0)\}$

BASE DE $C(A)$

1º MÉTODO 1) OBSERVAR QUE $C(A) = C((A^T)^T)$

2) ESCALONAR MATRIZ A^T E USAR LINHAS NÃO NULAS DA MATRIZ ESCALONADA.

2º MÉTODO SUPONHA QUE $A \sim B$, EM QUE

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & B_{1n_1} & \dots & B_{1n_p} \\ 0 & \dots & 0 & B_{2n_1} & \dots & B_{2n_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_{pn_1} & \dots & B_{pn_p} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n_1 < n_2 < \dots < n_p \\ B_{in_j} \neq 0, \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{matrix}$$

LOGO, AS COLUNAS $B = \{C_{An_1}, \dots, C_{An_p}\}$ FORMAM UMA BASE DE A . EM PARTICULAR, $\dim C(A) = p$

C_{An_j} = COLUNA n_j DE A

DEMO: B É L.I.

$$\alpha_1 C_{An_1} + \dots + \alpha_p C_{An_p} = 0 \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B_{1n_1}\alpha_1 + B_{1n_2}\alpha_2 + \dots + B_{1n_p}\alpha_p = 0 \\ B_{2n_1}\alpha_1 + \dots + B_{2n_p}\alpha_p = 0 \\ \vdots \\ B_{pn_1}\alpha_1 + \dots + B_{pn_p}\alpha_p = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha_p = \alpha_{p-1} = \dots = \alpha_1 = 0$. (RESOLVEMOS DE BAIXO PARA CIMA)

$$\underline{[B] = C(A)}$$

SEJA C_{A_j} , $j \notin \{n_1, \dots, n_p\}$.

SE $j < n_1$, ENTÃO $C_{A_j} = Ae_j = 0$, POIS $Be_j = 0$.

SE $n_k < j < n_{k+1}$ OU $n_p < j$, ENTÃO $Be_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{kj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

SABEMOS QUE EXISTE UMA SOLUÇÃO PARTICULAR $Bx_p = e_j$ T.O.
 $x_p = (0 \dots a_{n_1} \dots a_{n_k} \dots a_{n_p} \dots 0)$
POSICÃO n_k $\rightarrow$ 0 NAS VARIÁVEIS LIVRES

$$\text{LOGO } B(e_j - a_{n_1}e_{n_1} - \dots - a_{n_p}e_{n_p}) = 0 \Rightarrow A(e_j - a_{n_1}e_{n_1} - \dots - a_{n_p}e_{n_p}) = 0$$

$$\Rightarrow C_{A_j} = a_{n_1}C_{An_1} + \dots + a_{n_p}C_{An_p}$$

$$\text{EXEMPLO: } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

COLUMNA
COM PIVÔ COLUMNA
COM PIVÔ
 ↓ ↓

BASE DE $C(A)$
 $B = \{(1, 2, -1), (3, 9, 3)\}$

COROLÁRIO: 1) $\dim C(A) = \dim C(A^T) = p$ (POSTO LINHA = POSTO COLUMNA).
 2) O NÚMERO DE PIVÔS DE $A^T = \dim C((A^T)^T) = \dim C(A) = p$
 3) $\dim N(A^T) = m - \# \text{ PIVÔS DE } A^T = m - p$.

BASE DE $N(A^T)$

MÉTODO: ESCALONAR A^T E ACHAR $N(A^T)$.

$$\text{EXEMPLO: } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

BASE DE $N(A^T)$
 $B = \{(5, -2, 1)\}$

RESUMÃO: TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA LINEAR (PARTE 1)

SEJA $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. LOGO $N(A)$ E $C(A^T)$ SÃO SUBESPAÇOS DE $\mathbb{R}^n$, $N(A^T)$ E $C(A)$ SÃO SUBESPAÇOS DE $\mathbb{R}^m$. ALÉM DISSO,

1. $\dim N(A) = n - p$
2. $\dim C(A^T) = p$
3. $\dim N(A^T) = m - p$
4. $\dim C(A) = p$.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO: SEJAM V E W ESPAÇOS VETORIAIS. DIZEMOS QUE $T: V \rightarrow W$ É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR E

1) $T(u+v) = Tu + Tv, \forall u, v \in V$

2) $T(\alpha u) = \alpha Tu, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$

OBS: 1) + 2) $\Leftrightarrow T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V \Leftrightarrow T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$

EXEMPLO: DADO $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, A FUNÇÃO $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ DADA POR $Tx = Ax$ É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR.

PROPOSIÇÃO: SEJA $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ UMA BASE DE V E $T: V \rightarrow W$ UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR. LOGO T É UNICAMENTE DETERMINADA PELOS VALORES DE $Tv_i, i \in \{1, \dots, n\}.$

DEMO: SEJA $v \in V$. LOGO $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. ASSIM, $Tv = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_n Tv_n$. $\square$

EXEMPLO: SEJA $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR. SEJAM $y_i = Te_i \in \mathbb{R}^m, i \in \{1, \dots, n\}$. LOGO T ESTÁ COMPLETAMENTE DETERMINADA POR y_i . DE FATO, DEFINIMOS $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ POR $A = [y_1 \dots y_n]$. LOGO

$$Ax = [y_1 \dots y_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 Te_1 + \dots + x_n Te_n = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = Ax.$$

CONCLUSÃO: $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ É TRANSFORMAÇÃO LINEAR $\Leftrightarrow Tx = Ax$ PARA ALGUMA MATRIZ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

EXEMPLO: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ DADO POR $T(x, y) = (4x + 3y, 2y, x - y)$

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (4, 0, 1) \\ T(0, 1) &= (3, 2, -1) \end{aligned} \Rightarrow \text{A MATRIZ ASSOCIADA É } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left(A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+3y \\ 2y \\ x-y \end{bmatrix} \right)$$

$T_{e_1} \quad T_{e_2}$

EM GERAL, SE $T: V \rightarrow W$ É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ SÃO BASES DE V E W , RESPECTIVAMENTE, ENTÃO

$T_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik} w_k$ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ T_{11} & \dots & T_{1m} \\ | & & | \\ | & & | \\ T_{m1} & \dots & T_{mm} \\ | & & | \end{bmatrix}$ É MATRIZ ASSOCIADA A T .

EXAMPLE: $V = \{a + bx + cy^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ $B = \{1, x, x^2\}$ $T: V \rightarrow W$
 $W = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ $C = \{1, 1+x\}$ $T_p = \frac{d}{dx}$

QUEM É A MATRIZ ASSOCIADA A T ?

$$T(1) = 0$$

$$T(x) = |x| + O_x(1+x) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(x^2) = 2x = -2x + 2x(1+x)$$

$\mathcal{P}_{ADP} \quad p = 1 + 2x + 3x^2 \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow T_p = -4 + 6(1+x) = 2 + 6x$

DEFINIÇÃO: DADO UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR $T: V \rightarrow W$, DEFINIMOS A IMAGEM DE T COMO $\{Tx: x \in V\}$ E O NÚCLEO DE T COMO $\{x \in V: Tx = 0\}$.

INTERPRETAÇÃO DOS 4 ESPAÇOS

1) $C(A) = \text{IMAGEM DE } A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

2) $N(A) = \text{NÚCLEO DE } A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

3) $C(A^T) = \text{IMAGEM DE } A^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

4) $N(A^T) = \text{NÚCLEO DE } A^T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

NOTE QUE $n = \dim C(A) + \dim N(A) = \dim(\text{Im}(A)) + \dim(N(A))$