Álgebra Linear e Aplicações

• Teorema fundamental da álgebra linear Parte II, Somas diretas, projeções e projeções ortogonais, projeção sobre uma reta.

Ortogonalidade dos subespaços fundamentais

Definição: Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O complemento ortogonal de V é o conjunto
$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{v^T x}_{\langle v, x\rangle} = 0, \forall v \in V\}$

Teorema Fundamental da Álgebra Linear (Parte II)

1) $C(A^T)^\perp = N(A)$
2) $C(A)^\perp = N(A^\perp)$

Demo: 1) Vemos que $x \in C(A^T)^\perp \Leftrightarrow \langle \overset{\text{linha } j \text{ de } A}{L_{A_j}}, x\rangle = 0, \forall j \in \{1, \dots, m\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} - L_{A_1} - \\ \vdots \\ - L_{A_m} - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in N(A)$

2) Vemos que $x \in C(A)^\perp \Leftrightarrow \langle \underset{\text{coluna } j \text{ de } A}{C_{A_j}}, x\rangle = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow [x_1 \dots x_m] \begin{bmatrix} | & & | \\ C_{A_1} & \cdots & C_{A_n} \\ | & & | \end{bmatrix} = [0 \dots 0] \Leftrightarrow x^T A = 0$
$\Leftrightarrow x \in N(A^T)$ $\square$

Interpretação usando soma direta

Definição: Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Dizemos que V é a soma direta de W_1 e W_2, denotada por $W_1 \oplus W_2$ se

1) $V = W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$
2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

OBS 1: A condição 2) equivale à unicidade da decomposição $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$

Isto é, se $w_1 + w_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, $w_1, \tilde{w}_1 \in W_1$ e $w_2, \tilde{w}_2 \in W_2$, então $w_1 = \tilde{w}_1$ e $w_2 = \tilde{w}_2$.

($\Rightarrow$) Suponha que valha 2). Se $w_1 + w_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, $w_1, \tilde{w}_1 \in W_1$, $w_2, \tilde{w}_2 \in W_2$, então $w_1 - \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2$, ou seja, $w_1 = \tilde{w}_1$ e $w_2 = \tilde{w}_2$, pois $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Se a decomposição para todo $v \in V$ é única, então, se $v \in W_1 \cap W_2$, temos

$$v = \underset{W_1}{\underset{\cap}{v}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{0}} = \underset{W_1}{\underset{\cap}{0}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{v}} \Rightarrow v = 0.$$

Proposição: Se $V = W_1 \oplus W_2$, então a função $P: V \to V$ dada por $Px = w_1$ tal que $x = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ é uma transformação linear. Chama-se projeção no espaço W_1. (e também depende de W_2)

Demo: Se $x = w_1 + w_2$, $y = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $w_1, \tilde{w}_1 \in W_1$, $w_2, \tilde{w}_2 \in W_2$, então

$$x + y = (w_1 + \tilde{w}_1) + (w_2 + \tilde{w}_2) \Rightarrow P(x+y) = w_1 + \tilde{w}_1 = Px + Py$$

$$\lambda x = \lambda w_1 + \lambda w_2 \Rightarrow P(\lambda x) = \lambda w_1 = \lambda P x \qquad \square$$

OBS 2: Note que se $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, então $Px = w_1$ e $(I-P)x = x - w_1 = w_2$. Logo $x = Px + (I-P)x$ e $I - P$ é projeção sobre W_2.

Definição: Dizemos que os subespaços $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são ortogonais se $u^T v = 0$, $\forall u \in U$ e $v \in V$ (Notação: $U \perp V$).
Se $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, U e V são ortogonais, então a projeção $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em U é chamada de projeção ortogonal.

OBS 3: Se $U \perp V$, então $U \cap V = \{0\}$, pois se $x \in U \cap V$, então $\|x\|^2 = \overset{U}{x}^T \overset{V}{x} = 0$. Em particular, se $u + v = 0$, $u \in U$, $v \in V$, então $u = -v \in U \cap V = \{0\}$. Logo $u = v = 0$.

OBS 4: Se $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, $U \perp V$, então $V = U^\perp$ (e $U = V^\perp$). De fato, $V \subset U^\perp$, pois U e V são ortogonais. Além disso, se $x = \underset{U}{u} + \underset{V}{v} \in U^\perp$, então $u^T(u+v) = 0 \Rightarrow u^T u = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x = v \in V$. Logo $U^\perp \subset V$ e $U^\perp = V$.
($u^T v = 0$, pois $U \perp V$)

Nosso objetivo é provar

Teorema: $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T)$ e $\mathbb{R}^n = C(A^T) \oplus N(A)$.

Corolário: Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ e $V = [S]$. Logo $\mathbb{R}^m = V \oplus V^\perp$.

Demo: Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ a matriz com colunas $v_1, \dots, v_n$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$. Logo $V = [S] = C(A)$ e $V^\perp = N(A^T)$. Logo $\mathbb{R}^m = C(A) \oplus N(A^T) = V \oplus V^\perp$.

Lema: Seja V um espaço vetorial e $S=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$ um conjunto L.I.

1. Se $u\in V\setminus[S]$, então $S\cup\{u\}$ é L.I.
2. Em particular, se S é L.I. e $S\cup\{u\}$ é L.D., então $u\in[S]$

Demo: 1. Suponha que $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n+\alpha u=0$. Se $\alpha\neq 0$, então $u=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\alpha}v_j\in[S]$, o que contradiz nossas hipóteses. Logo $\alpha=0$. Portanto, $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0\Rightarrow\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$, pois S é L.I.

2. Por fim, se S é L.I. e $S\cup\{u\}$ é L.D., então $u\in[S]$. Caso contrário, $u\in V\setminus[S]$ e $S\cup\{u\}$ seria L.I.

Proposição: Seja V um espaço vetorial com $\dim V=n$. Todo conjunto L.I. de n elementos é uma base.

Demo: Se $[S]\neq V$, então $\exists\, v\in V\setminus[S]$. Logo $S\cup\{v\}$ é L.I. pelo lema. Porém, como $S\cup\{u\}$ é L.I. e está contido num espaço de dimensão n, $S\cup\{u\}$ deveria ter no máximo n elementos. Absurdo!

Proposição: Sejam U e V subespaços ortogonais de $\mathbb{R}^n$. Se $\dim U+\dim V=n$, então $\mathbb{R}^n=U\oplus V$.

Demo: i) $U\cap V=\{0\}$. Isto segue de OBS 3.

ii) $\mathbb{R}^n=U+V$. Sejam $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ bases de U e V, respectivamente. Vamos mostrar que $\mathcal{B}_U\cup\mathcal{B}_V=\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^n$. Pela proposição anterior, basta mostrar que $\mathcal{B}$ é L.I.

Se $\mathcal{B}_U=\{u_1,\dots,u_N\}$, $\mathcal{B}_V=\{v_1,\dots,v_M\}$, então $\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_N u_N+\beta_1 v_1+\dots+\beta_M v_M=0$ implica, pela OBS 3, que $\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_N u_N=0$ e $\beta_1 v_1+\dots+\beta_M v_M=0$. Logo $\alpha_1=\dots=\alpha_N=\beta_1=\dots=\beta_M=0$, pois $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ são L.I.'s.

Como $\mathcal{B}$ é base, se $x\in\mathbb{R}^n$, então $x=\underbrace{\alpha_1 u_1+\dots+\alpha_N u_N}_{:=u\in U}+\underbrace{\beta_1 v_1+\dots+\beta_M v_M}_{:=v\in V}\in U+V$.

Demo do Teorema: $C(A)$ e $N(A^T)$ são ortogonais e $\dim C(A)+\dim N(A^T)=p+m-p=m\Rightarrow\mathbb{R}^m=C(A)\oplus N(A^T)$

$C(A^T)$ e $N(A)$ são ortogonais e $\dim C(A^T)+\dim N(A)=p+n-p=n\Rightarrow\mathbb{R}^n=C(A^T)\oplus N(A)$

Por fim, vemos que $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leva espaço linha em espaço coluna.

<u>Proposição</u>: Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. A transformação linear $T: C(A^T) \to C(A)$ dada por $Tx = Ax$ é bijetora.

<u>Demo</u>: i) É sobrejetora.

Se $y \in C(A)$, então $y = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$. Como $x = n + l$, $n \in N(A)$, $l \in C(A^T)$, então $y = Al$, ou seja, $y = Tl$, $l \in C(A^T)$

ii) É injetora.

Se $Tx = Ty$, então $A(x-y) = 0$. Logo $x - y \in N(A)$. Assim, $\langle \underbrace{x-y}_{\in N(A)}, \underbrace{x-y}_{\in C(A^T)} \rangle = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

<u>OBS</u>: O mesmo vale para $A^T: C(A) \to C(A^T)$. É transformação linear bijetora!

<u>Cálculo de Projeções ortogonais em $\mathbb{R}^n$</u>

Para calcular projeções, usaremos a seguinte proposição.

<u>Proposição</u>: Seja V um espaço vetorial, $W_1, W_2 \subset V$ subespaços vetoriais tais que $V = W_1 \oplus W_2$. Logo $P: V \to V$ é a projeção sobre $W_1 \Leftrightarrow Px \in W_1$ e $(I-P)x \in W_2$, $\forall x \in V$.

Em particular, P é projeção ortogonal, isto é, $W_2 = W_1^\perp \Leftrightarrow Px \in W_1$ e $(I-P)x \in W_1^\perp$, $\forall x \in V$.

<u>Demo</u>: ($\Rightarrow$) Sabemos que $x = u + v$, $u \in W_1$, $v \in W_2$, se $x \in V$.

Logo $Px = u \in W_1$ e $(I-P)x = x - u = v \in W_2$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in V$. Logo $x = u + v$, $u \in W_1$, $v \in W_2$. Como $x = Px + (I-P)x$, $Px \in W_1$, $(I-P)x \in W_2$ e a decomposição é única, concluímos que $Px = u$ e P é a projeção sobre U.

Projeção Ortogonal sobre um espaço de dimensão 1.

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ e $V = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} = [v]$. Sabemos que $\mathbb{R}^m = V \oplus V^\perp$.

A projeção ortogonal sobre V deve satisfazer

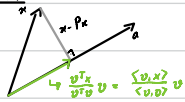
1) $Px \in V$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Logo $Px = \lambda v$

2) $(I-P)x \in V^\perp$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Logo $v^T(I-P)x = 0 \Rightarrow v^T(x - \lambda v) = 0 \Rightarrow v^T x = \lambda v^T v \Rightarrow \lambda = \frac{v^T x}{v^T v}$.

Portanto,

$$\boxed{Px = \frac{v^T x}{v^T v} v = \frac{v v^T}{v^T v} x}$$

Interpretação Geométrica:



Exemplo: $a = (\pi\cos\theta, \pi\operatorname{sen}\theta)$. Logo $P(x,y) = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

A matriz associada é $\frac{1}{\pi^2}\begin{bmatrix} \pi\cos\theta \\ \pi\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pi\cos\theta & \pi\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$

Note que $P(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$P(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0, 0)$.