Grafos: Busca em Profundidade

SCC0216 Modelagem Computacional em Grafos

Thiago A. S. Pardo
Maria Cristina F. Oliveira

Percorrendo um grafo

- Há duas possibilidades
  - Busca em largura (usando uma fila)
  - **Busca em profundidade (usando uma pilha)**

Percorrendo um grafo

DFS - *Depth-First Search*

- Explora-se cada vértice do grafo em profundidade, a medida em que é visitado...
  - Procura-se avançar na busca sem olhar para todos os vértices vizinhos 'no mesmo nível'
  - Quando necessário, volta-se aos vizinhos ainda não totalmente processados antes (processo de backtracking)

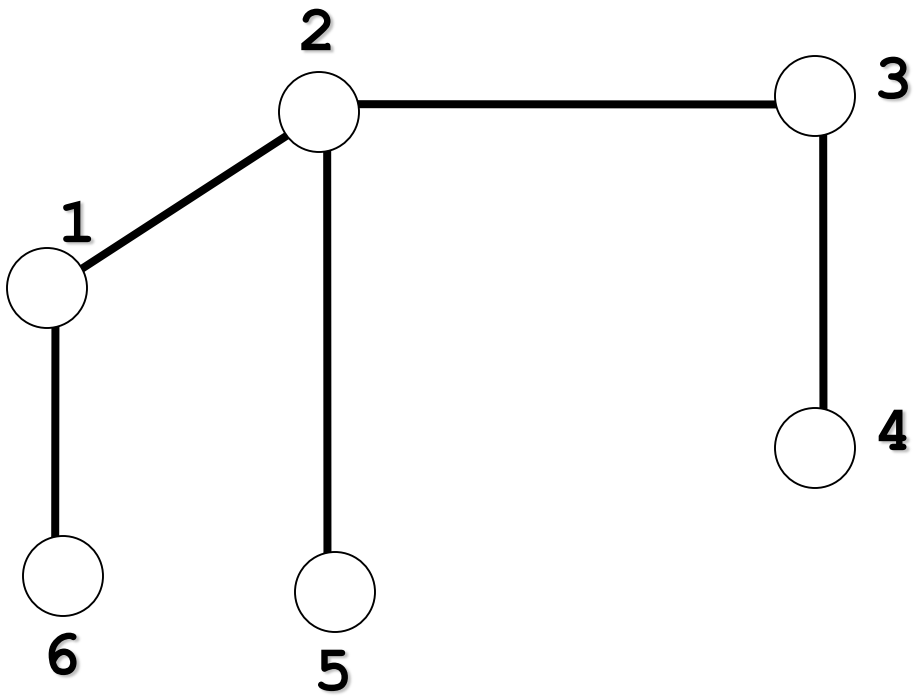
Percorrendo um grafo

DFS - *Depth-First Search*

- Pode-se adotar o mesmo esquema de rotulação por cores para guiar a busca
  - Todos os vértices são inicializados brancos
  - Quando um vértice *v* é 'descoberto' pela primeira vez, ele se torna cinza
  - Um vértice *v* torna-se preto quando todos os vértices adjacentes a ele tiverem sido 'descobertos'

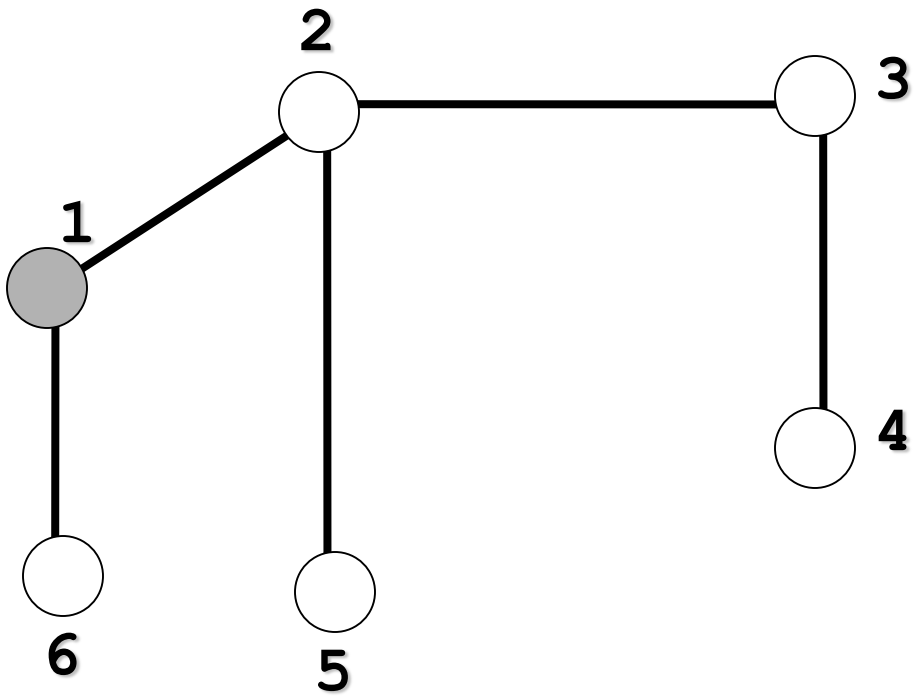
DFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: DFS



DFS – exemplo

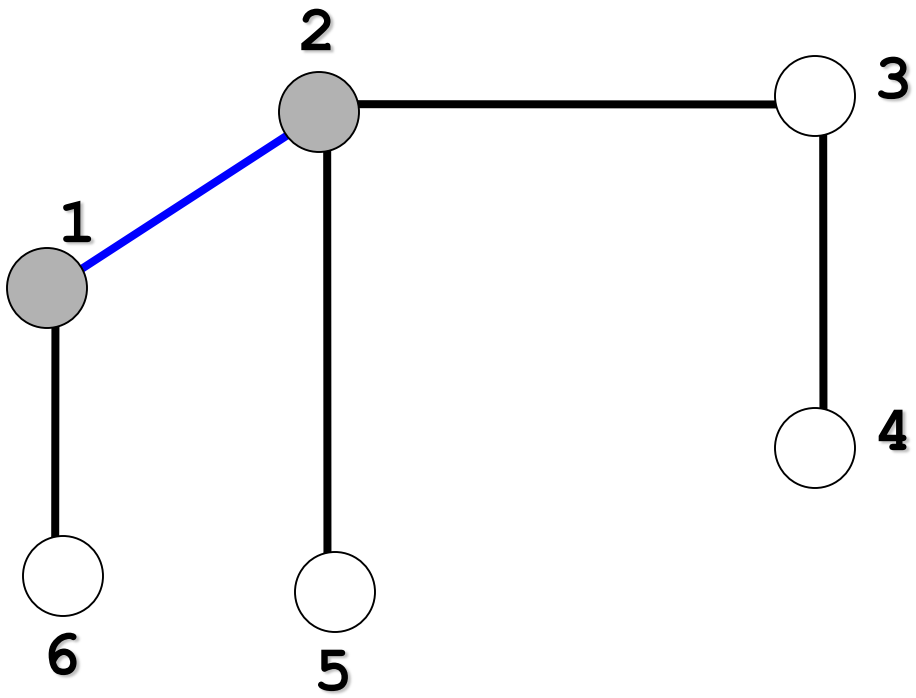
Percorrendo um Grafo: DFS



Vértice inicial: 1

DFS – exemplo

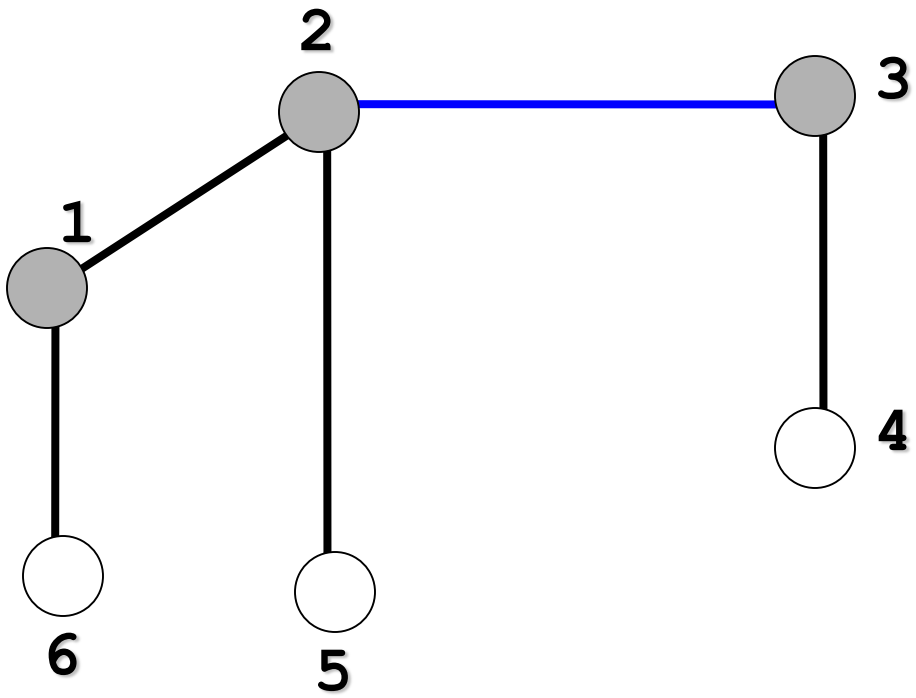
Percorrendo um Grafo: DFS



Busca-se pelo primeiro vértice adjacente a 1: 2

DFS – exemplo

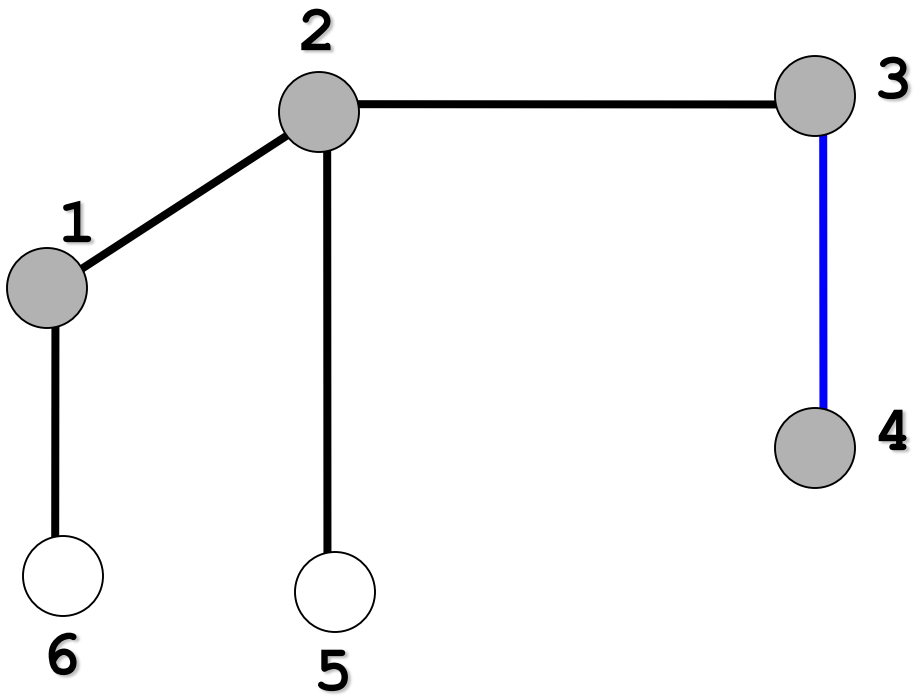
Percorrendo um Grafo: DFS



Busca-se pelo primeiro vértice adjacente a 2: 3

DFS – exemplo

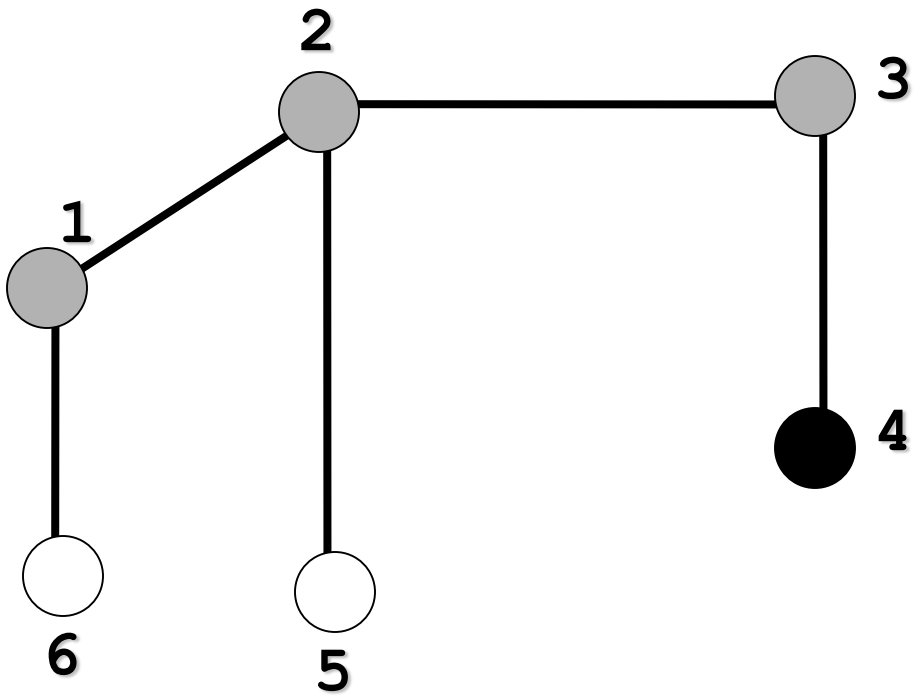
Percorrendo um Grafo: DFS



Busca-se pelo primeiro vértice adjacente a 3: 4

DFS – exemplo

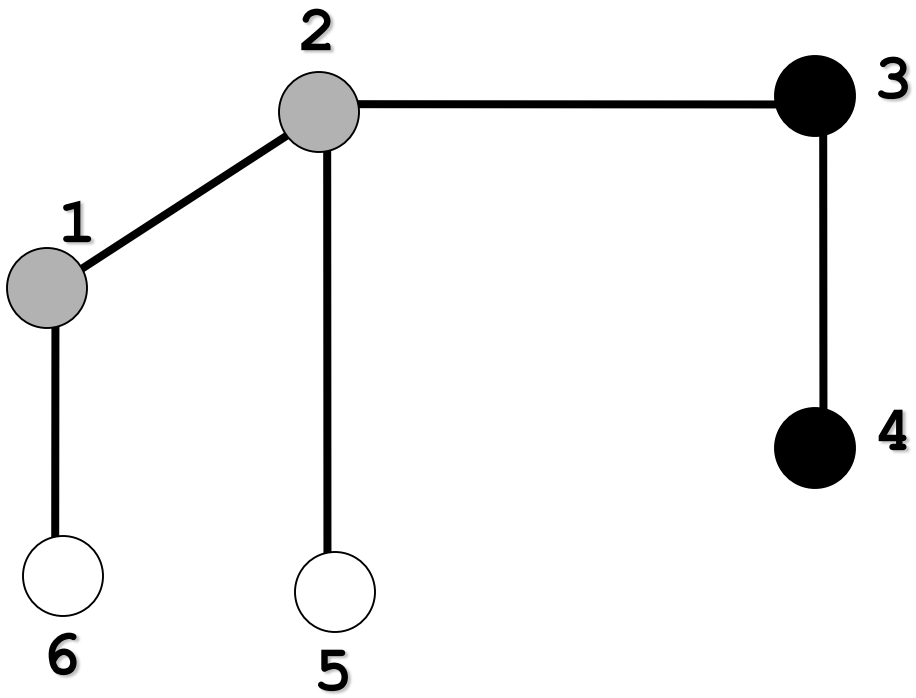
Percorrendo um Grafo: DFS



Vértice 4 não tem mais vértices adjacentes! Retorna-se ao anterior.

DFS – exemplo

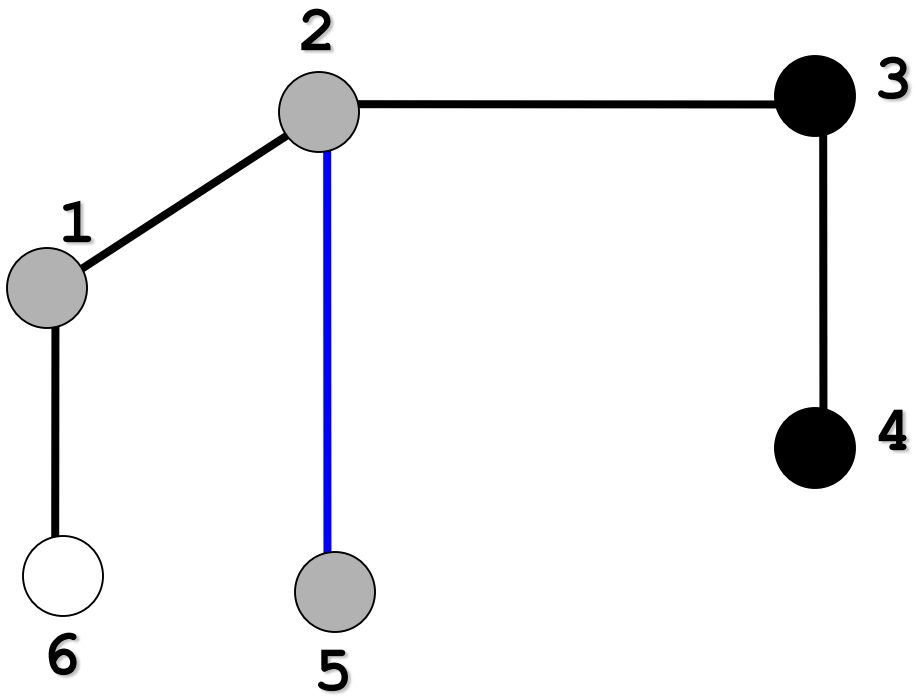
Percorrendo um Grafo: DFS



Vértice 3 não tem mais vértices adjacentes! Retorna-se ao anterior: 2

DFS – exemplo

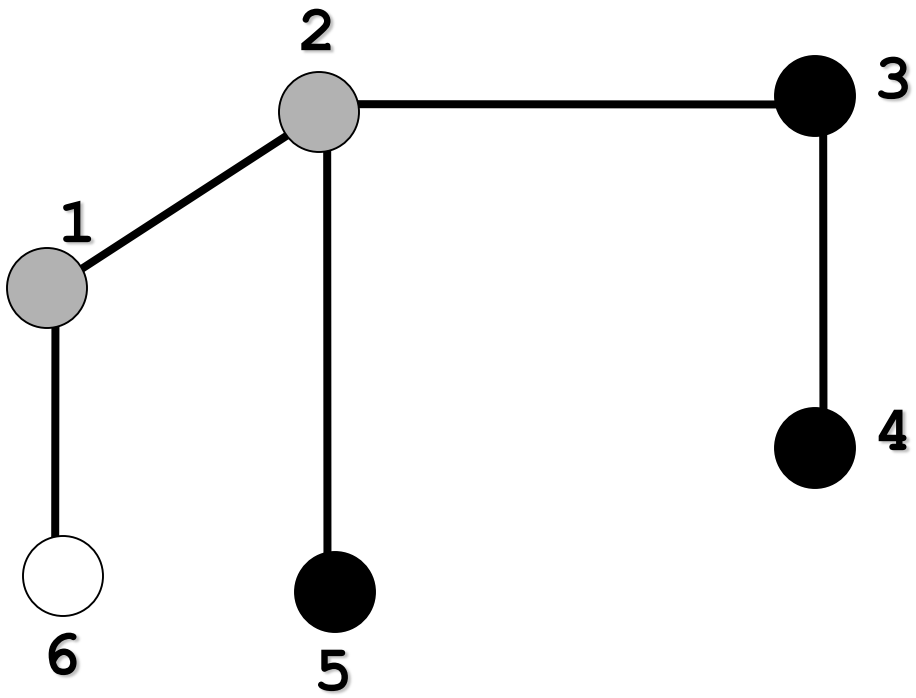
Percorrendo um Grafo: DFS



Busca-se pelo outro vértice adjacente a 2: 5

DFS – exemplo

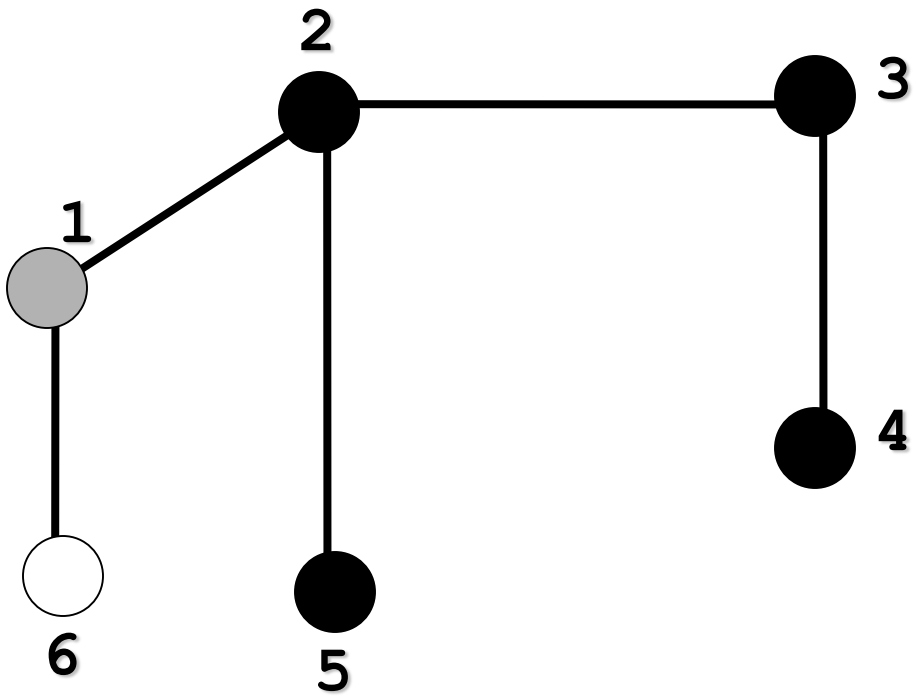
Percorrendo um Grafo: DFS



Vértice 5 não tem mais nós adjacentes! Retorna-se ao anterior: 2

DFS – exemplo

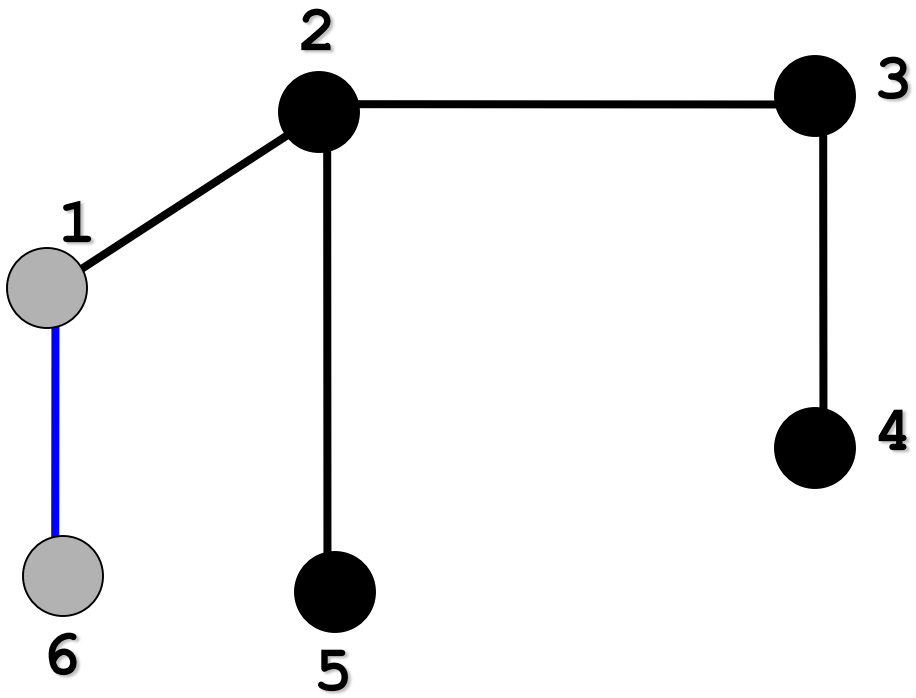
Percorrendo um Grafo: DFS



Vérrice 2 não tem mais vértices adjacentes! Retorna-se ao anterior: 1

DFS – exemplo

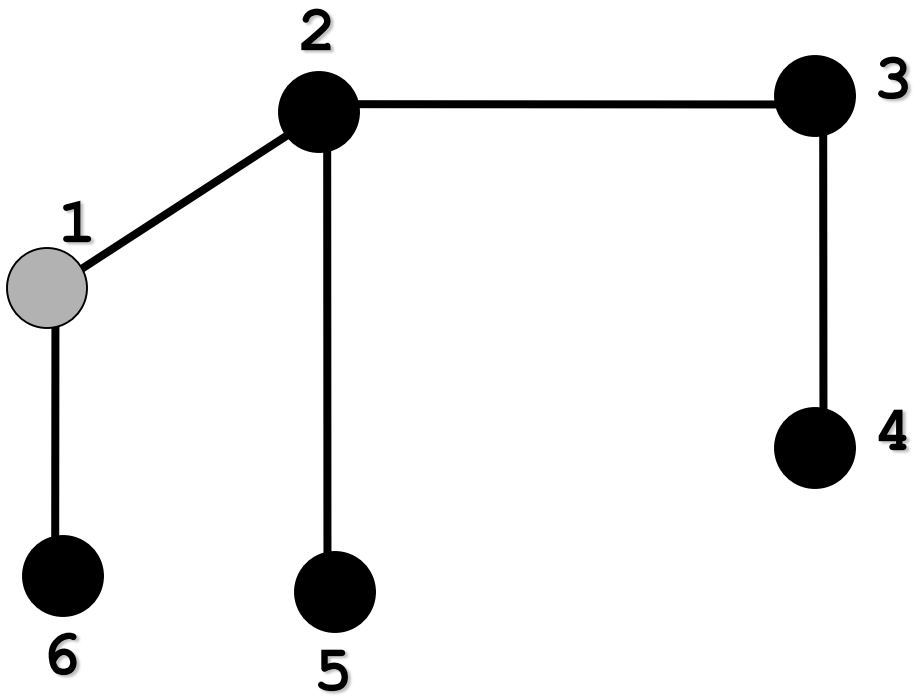
Percorrendo um Grafo: DFS



Busca-se pelo outro vértice adjacente a 1: 6

DFS – exemplo

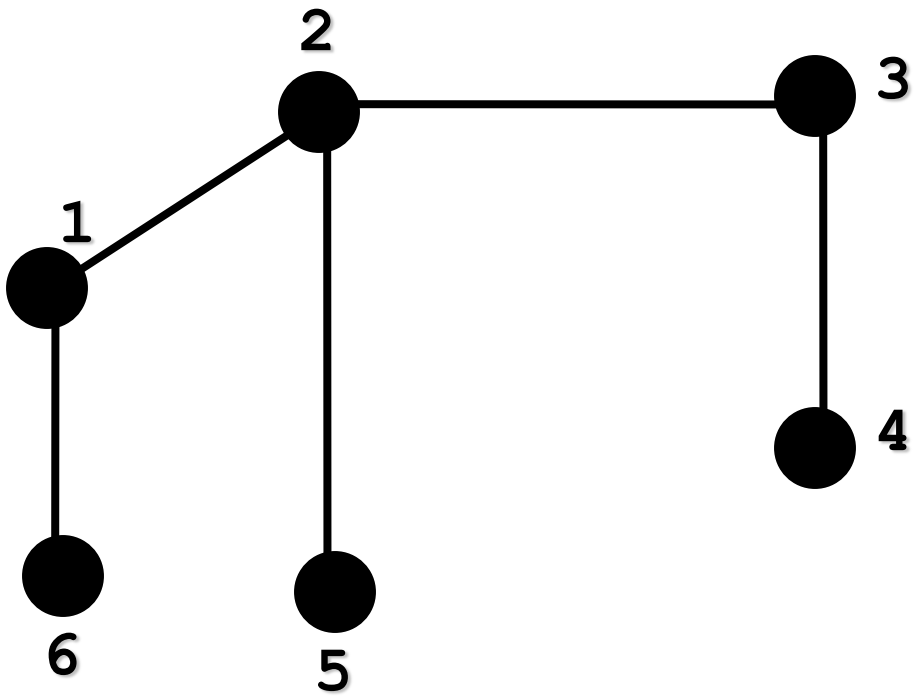
Percorrendo um Grafo: DFS



Vértice 6 não tem mais vértices adjacentes! Retorna-se ao anterior: 1

DFS – exemplo

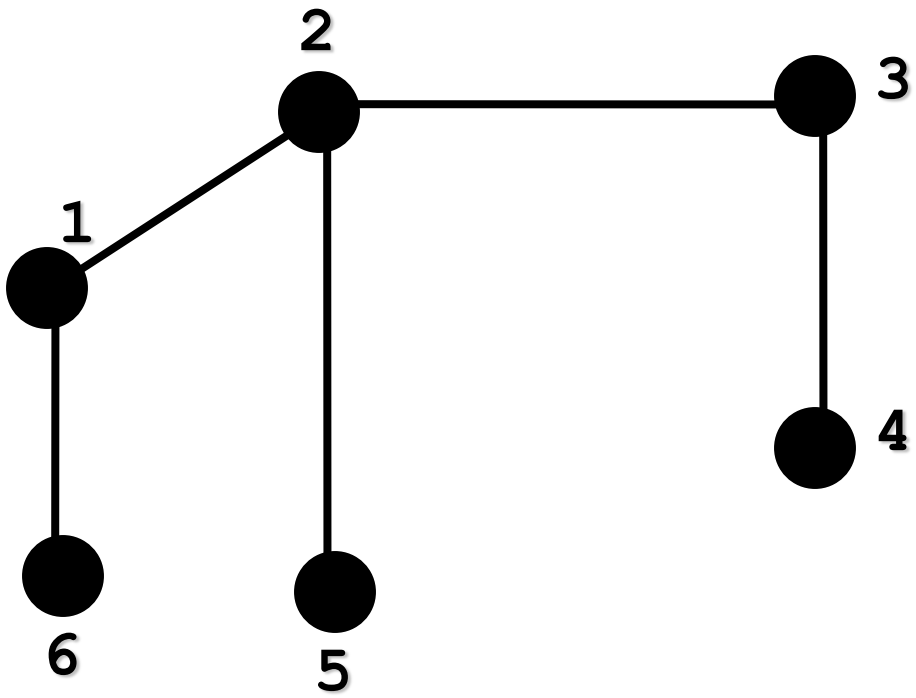
Percorrendo um Grafo: DFS



Vértice 1 não tem mais vértices adjacentes! Fim da busca!

DFS – exemplo

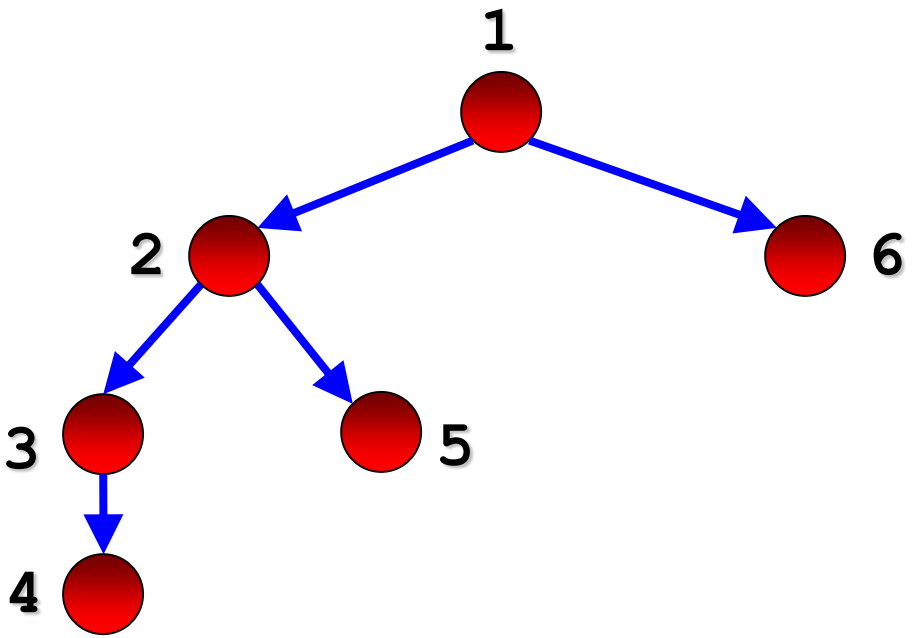
Percorrendo um Grafo: DFS



Sequencia dos vértices (processados): 4, 3, 5, 2, 6, 1

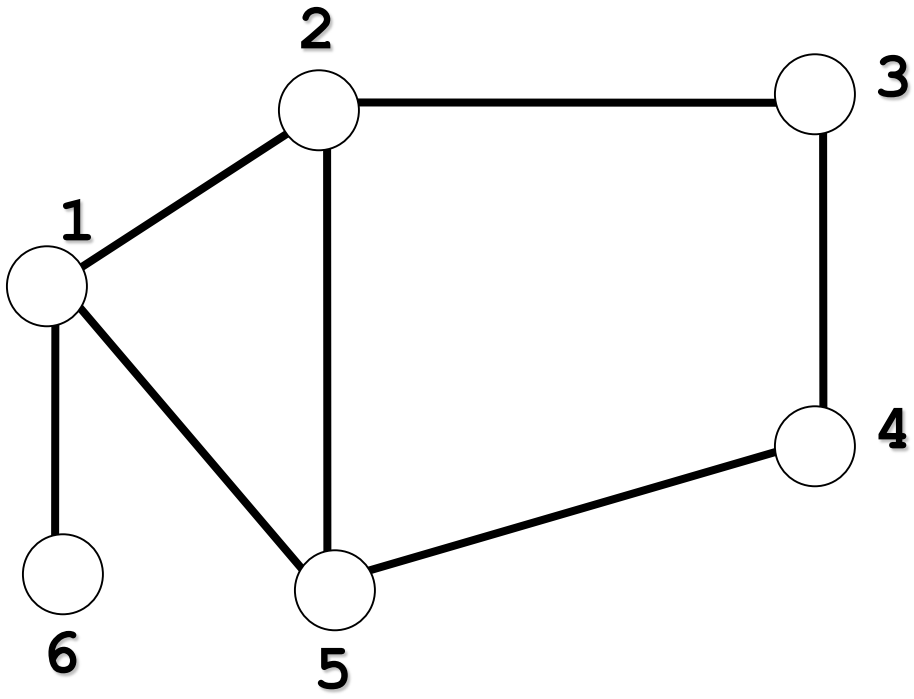
Árvore de busca em profundidade

Percorrendo um Grafo: **Árvore de Busca em Profundidade**



Todas as arestas foram percorridas: é um mero acaso!

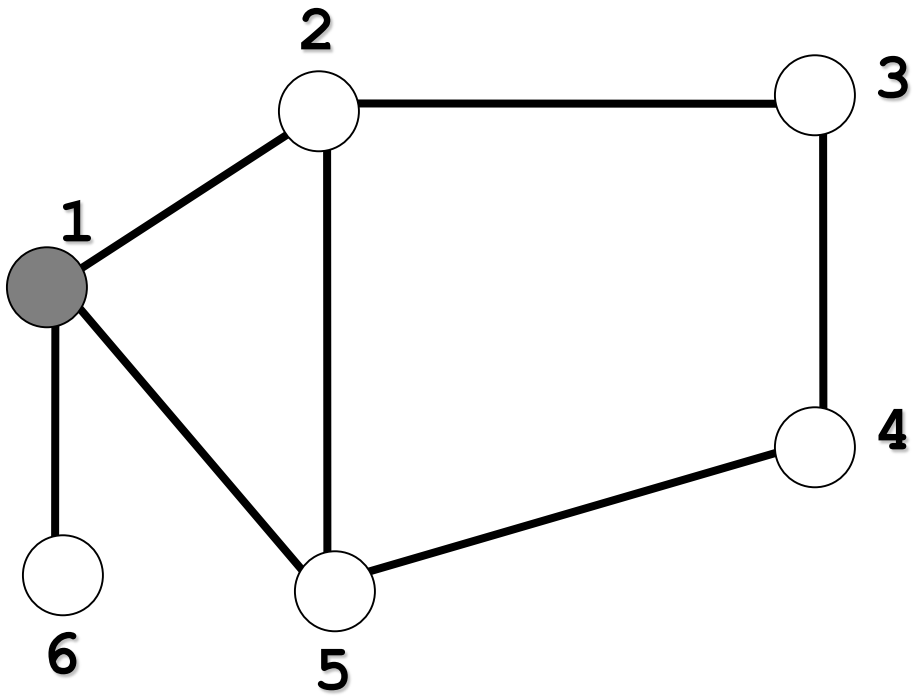
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza)

Nós processados (preto)

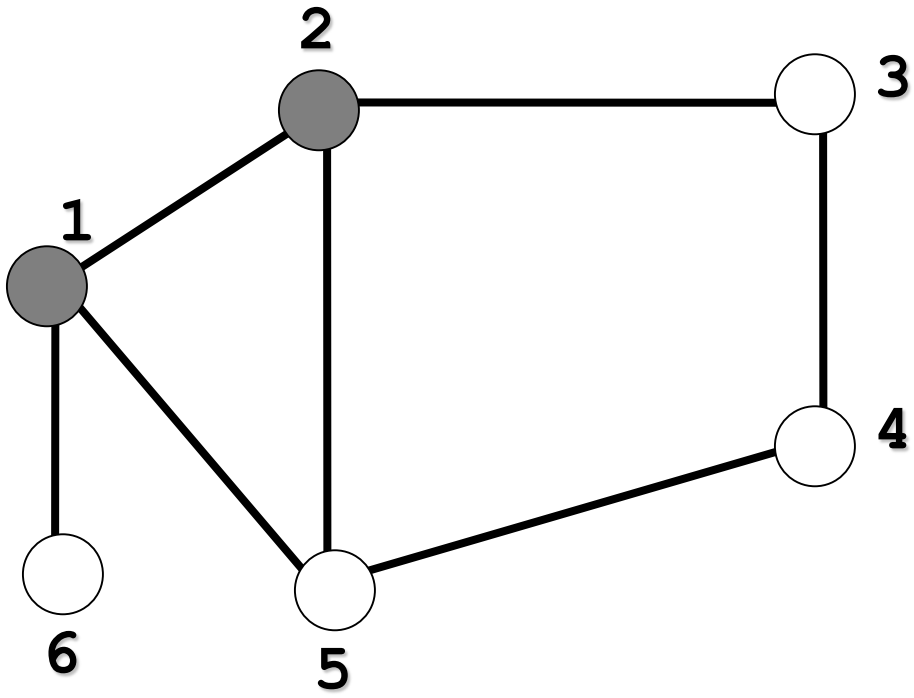
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1

Nós processados (preto):

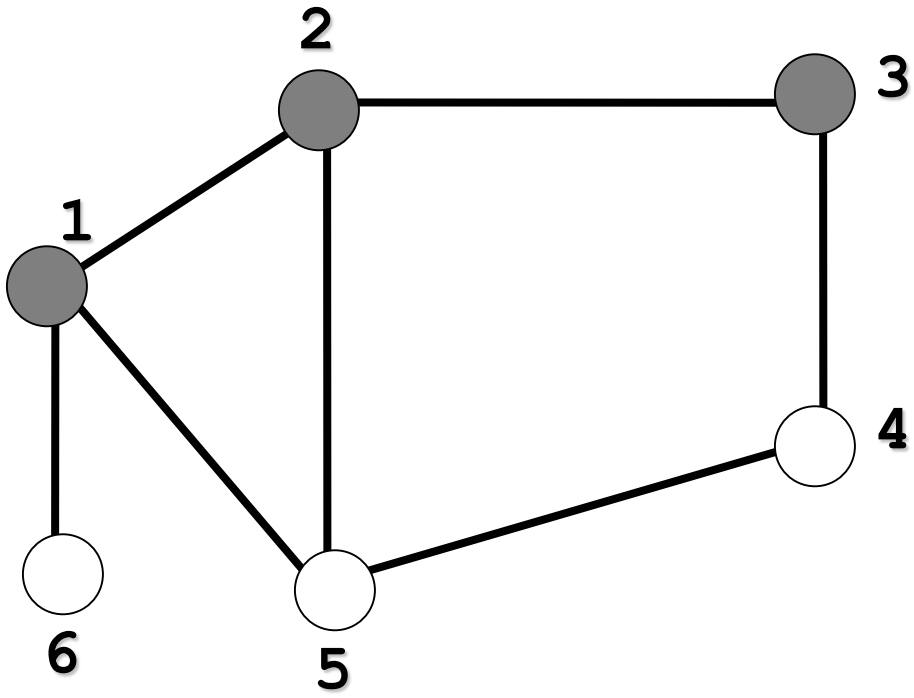
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2

Nós processados (preto):

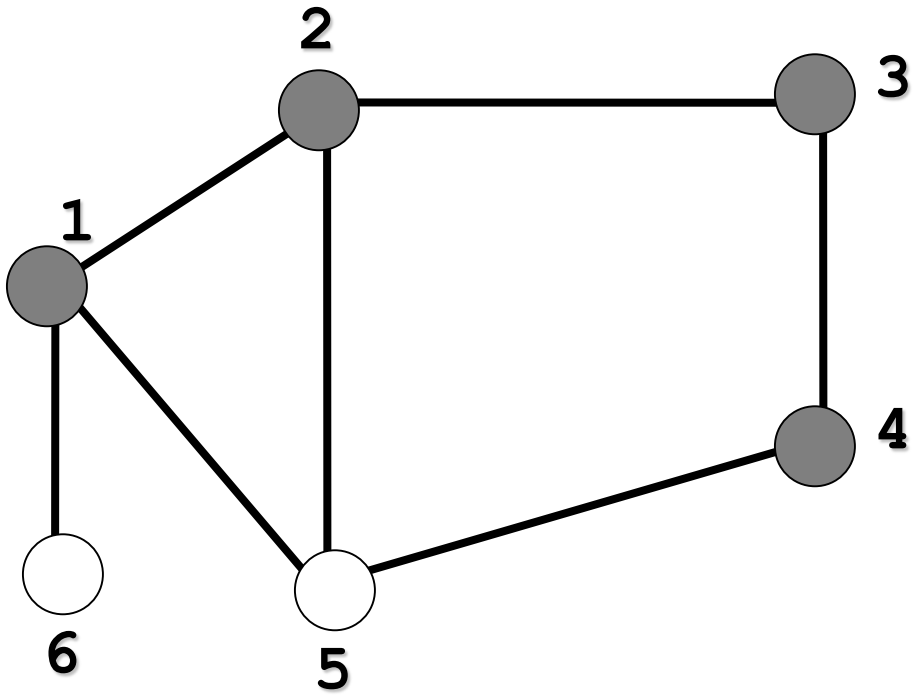
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3

Nós processados (preto):

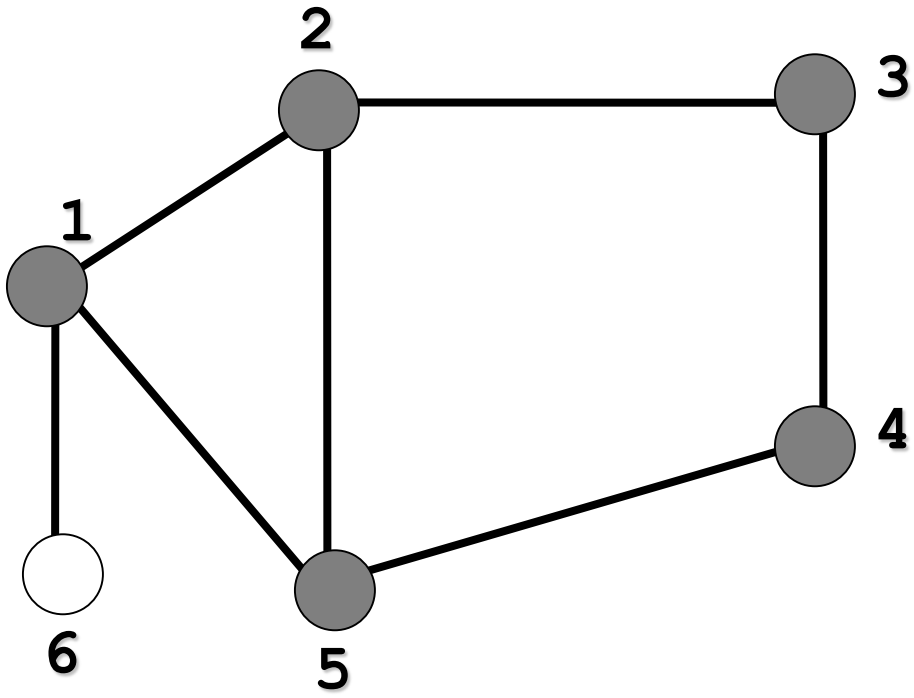
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4

Nós processados (preto):

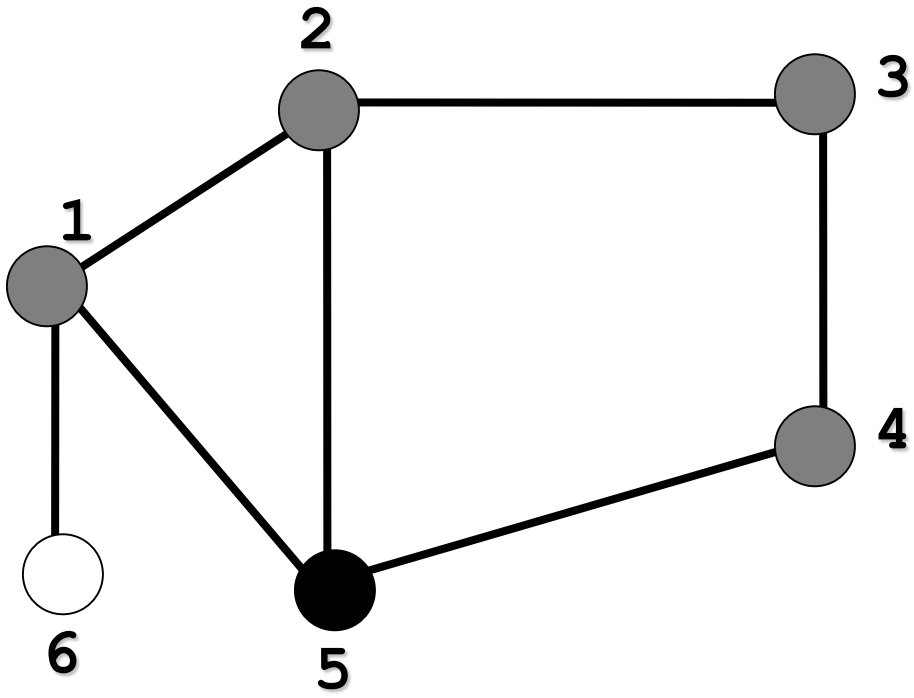
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5

Nós processados (preto):

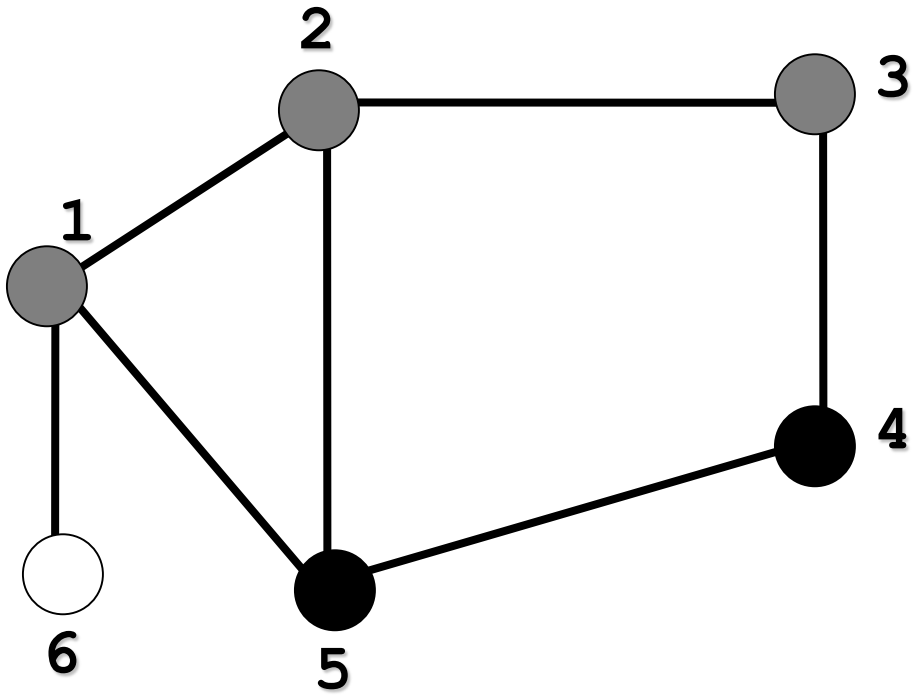
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5

Nós processados (preto): 5

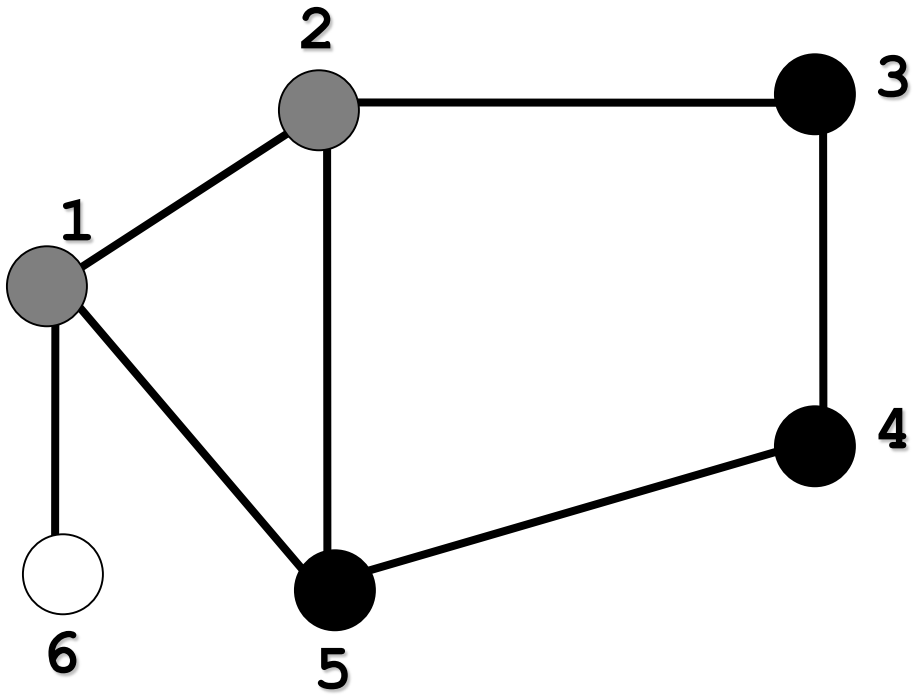
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5

Nós processados (preto): 5 4

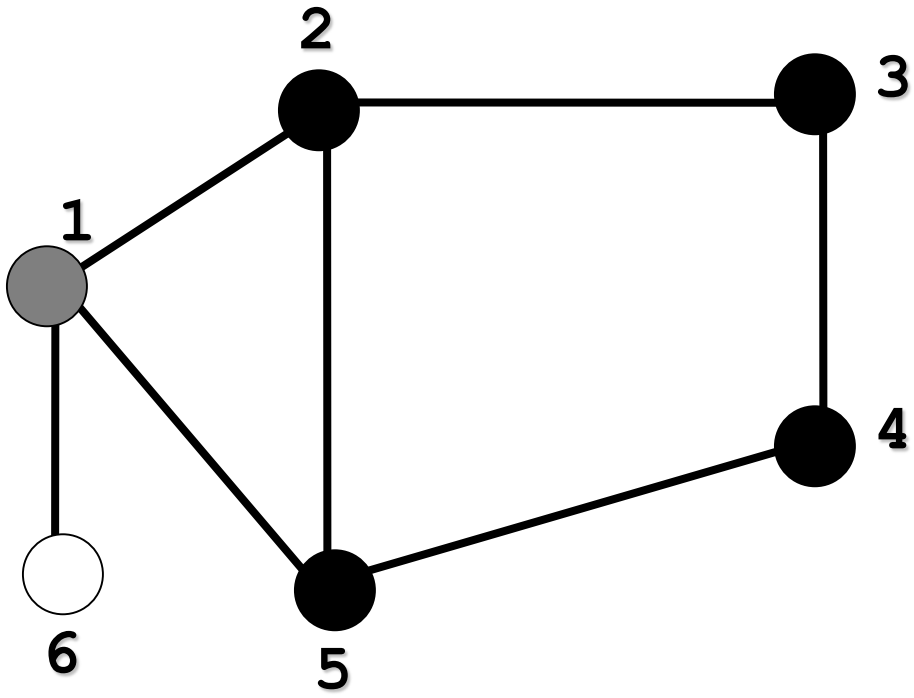
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5

Nós processados (preto): 5 4 3

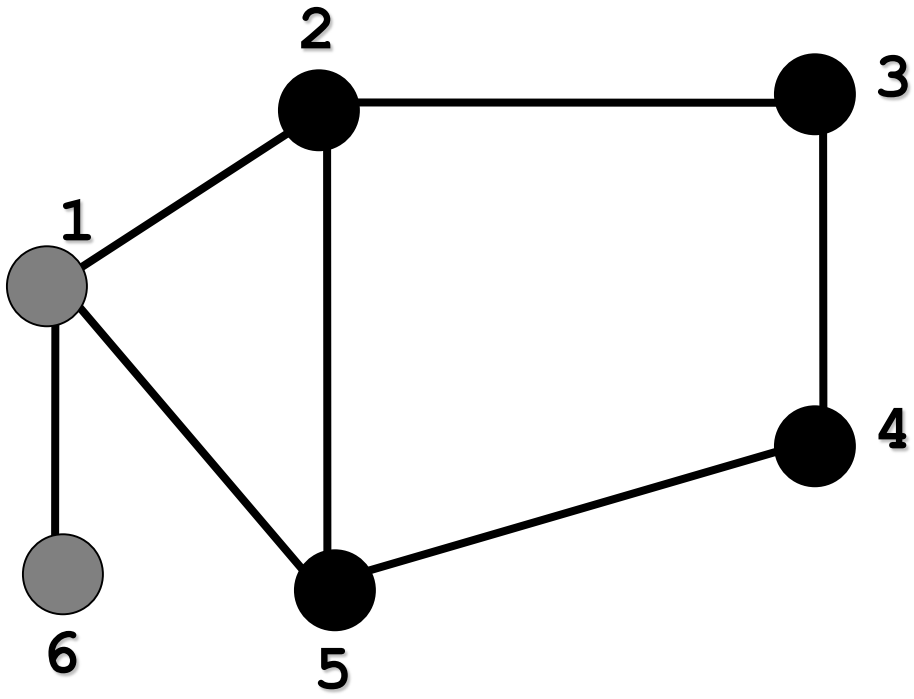
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5

Nós processados (preto): 5 4 3 2

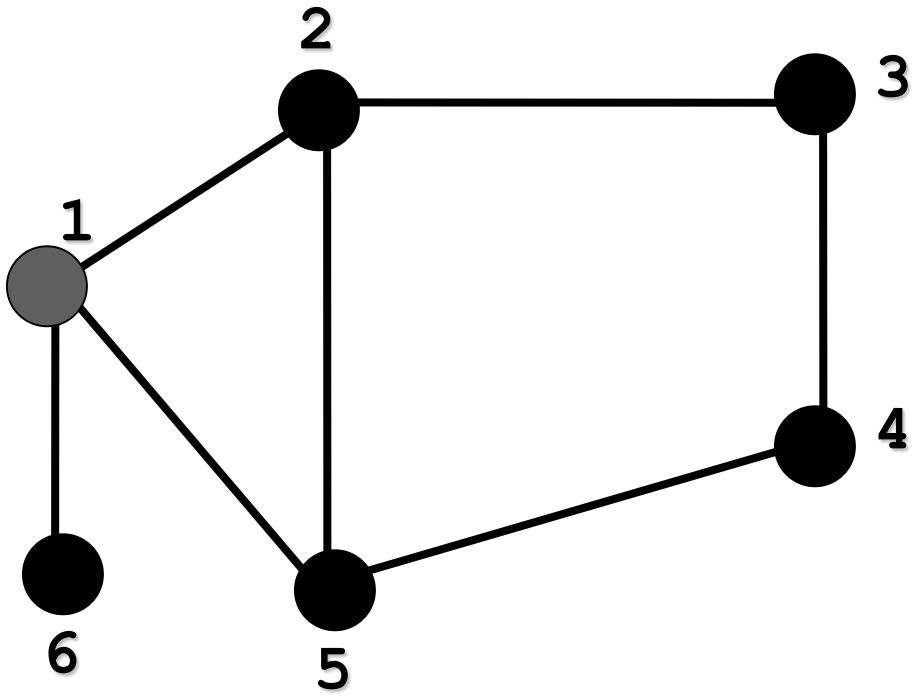
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5 6

Nós processados (preto): 5 4 3 2 1

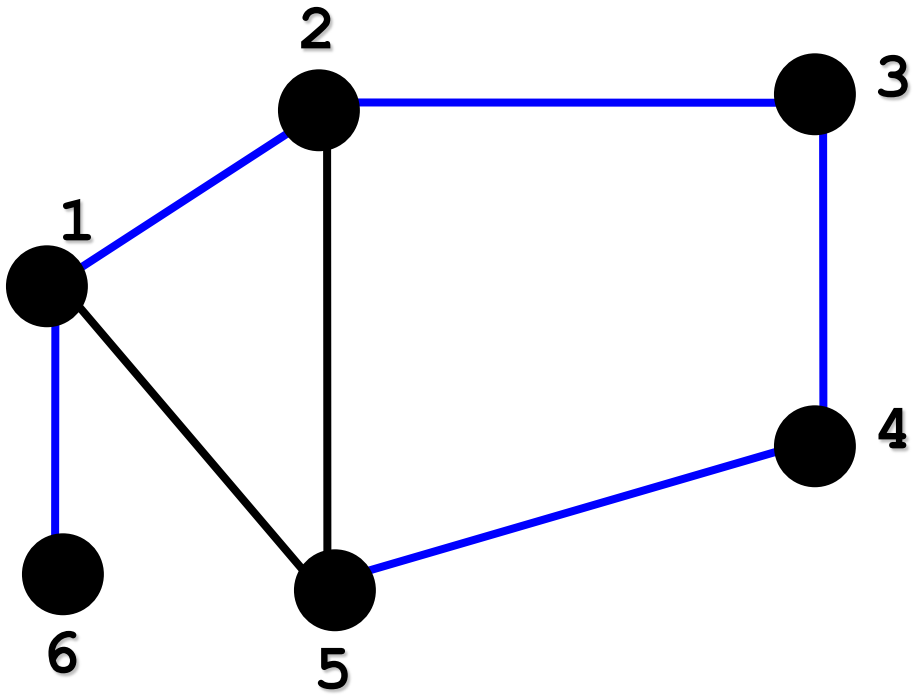
DFS – exemplo 2



Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5 6

Nós processados (preto): 5 4 3 2 6

DFS – exemplo 2

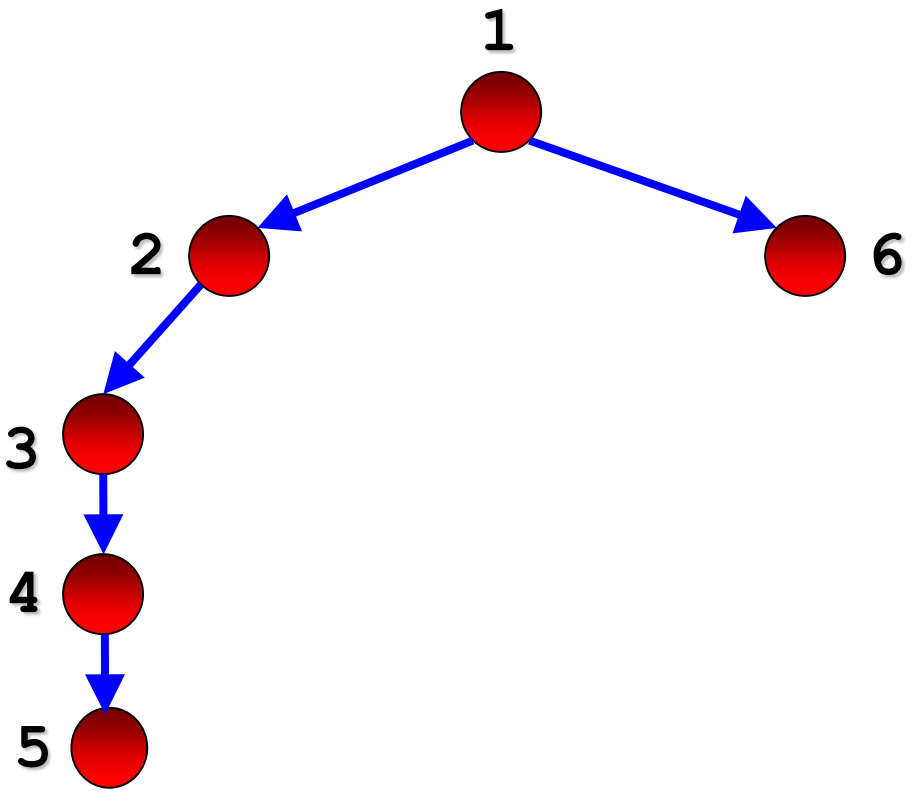


Nós descobertos (cinza): 1 2 3 4 5 6

Nós processados (preto): 5 4 3 2 6 1

Árvore de busca em profundidade

Percorrendo um Grafo: **Árvore de Busca em Profundidade**



Nem todas as arestas foram percorridas!

DFS

- Algoritmo
  - Usa uma pilha para organizar os vértices a serem percorridos
    - Pilha pode ser implícita (via recursão) ou explícita

DFS - algoritmo

```
procedure DFS(G, v) is
    label v as gray
    for all edges (v,w) in G.adjacentEdges(v) do
        if vertex w not labeled as gray then
            call DFS(G, w)
    label v as black
```

DFS

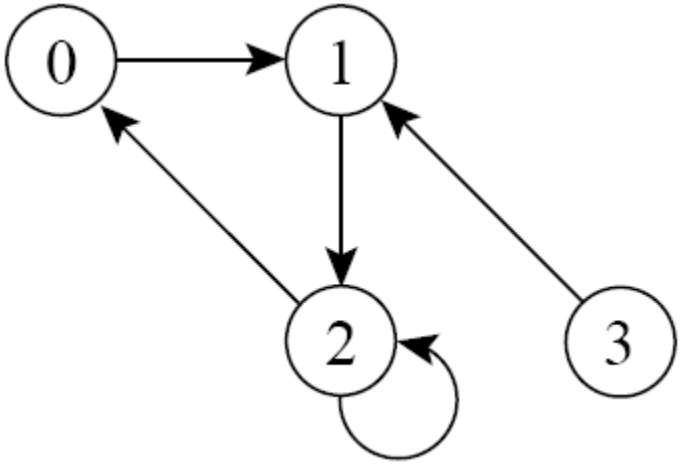
- Algoritmo
  - Usa uma pilha para organizar os vértices a serem percorridos
    - Pilha pode ser implícita (via recursão) ou explícita

  1. A cada escolha de caminho a ser desenvolvido, empilha-se o vértice original e segue-se o caminho
  2. Cada vez que o caminho acaba, retorna-se ao vértice anterior empilhado

  - Costuma-se registrar o tempo de descoberta (cinza) e o tempo de término da busca (preto) de cada vértice

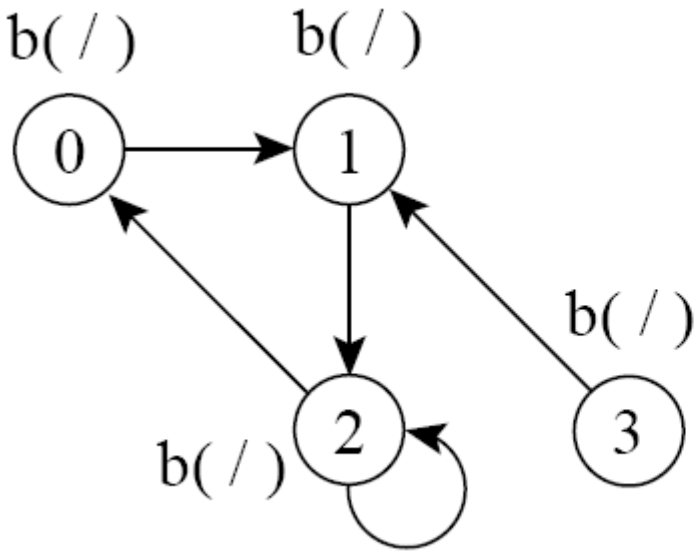
DFS

- Exemplo detalhado
  - Status de cada vértice, tempo de descoberta e tempo de término



DFS

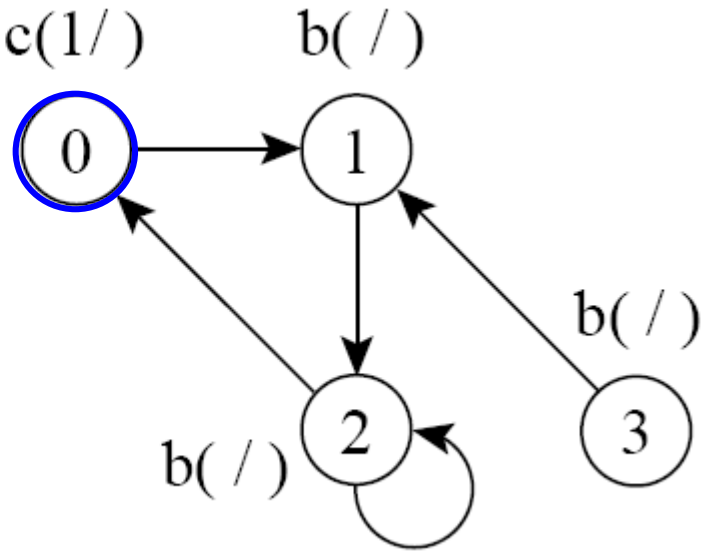
- Exemplo detalhado



b=branco, c=cinza, p=preto, (tempo de descoberta / tempo de término do vértice)

DFS

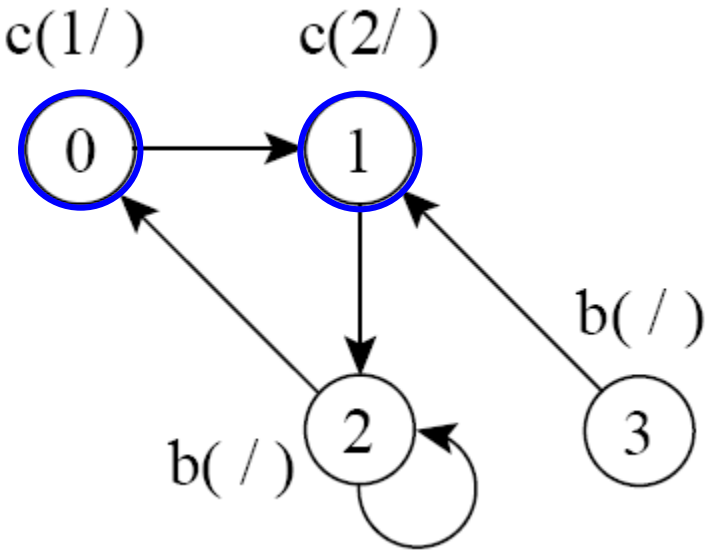
- Exemplo detalhado



b=branco, c=cinza, p=preto, (tempo de descoberta / tempo de término do vértice)

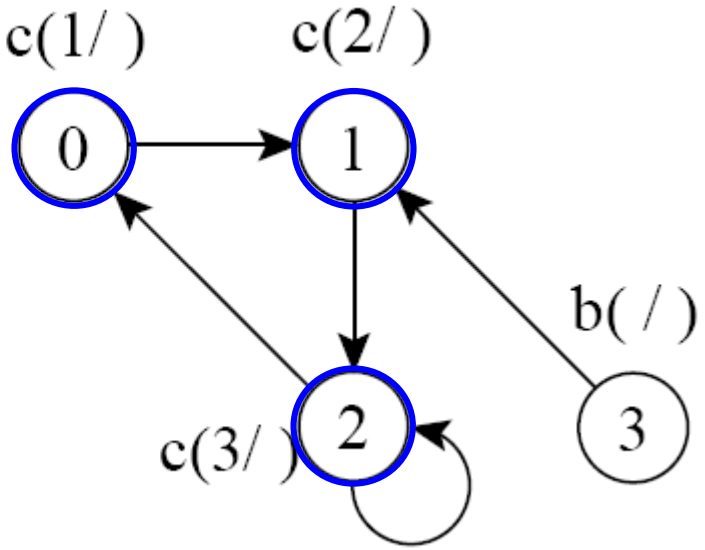
DFS

- Exemplo detalhado



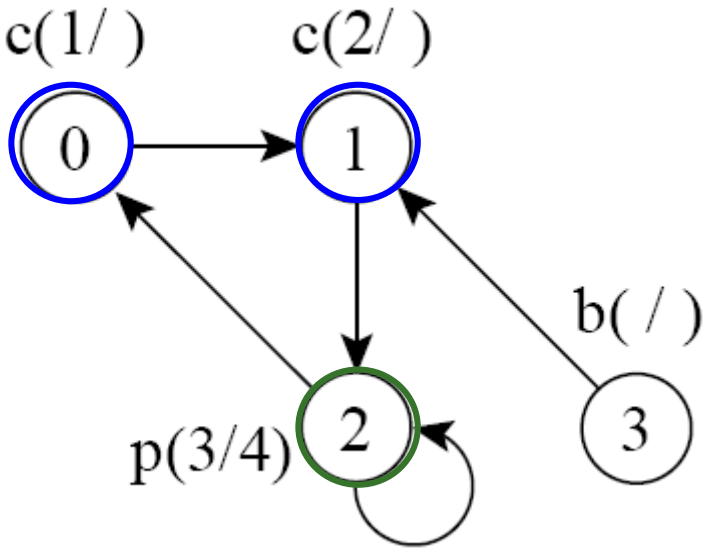
DFS

- Exemplo detalhado



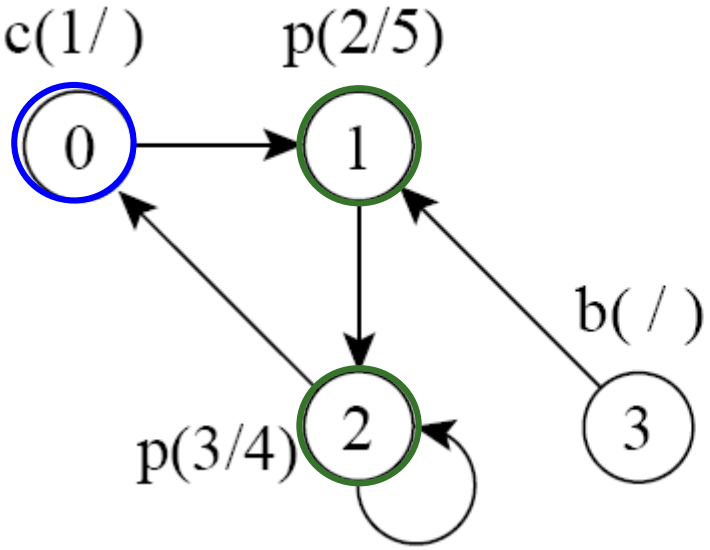
DFS

- Exemplo detalhado



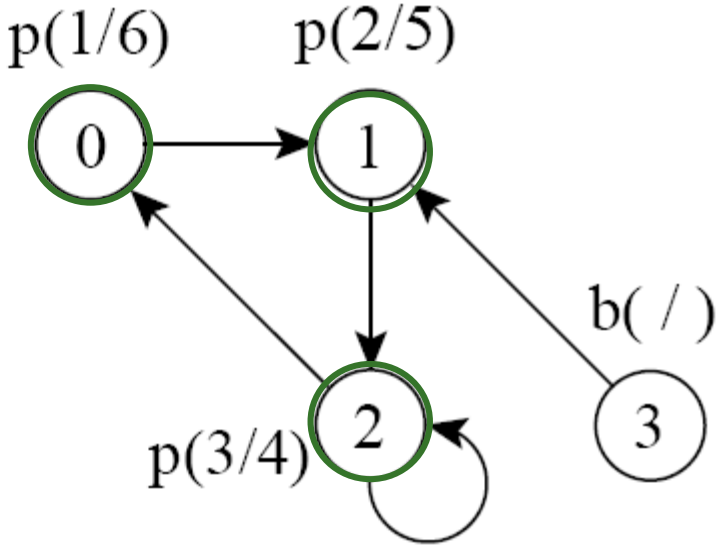
DFS

- Exemplo detalhado



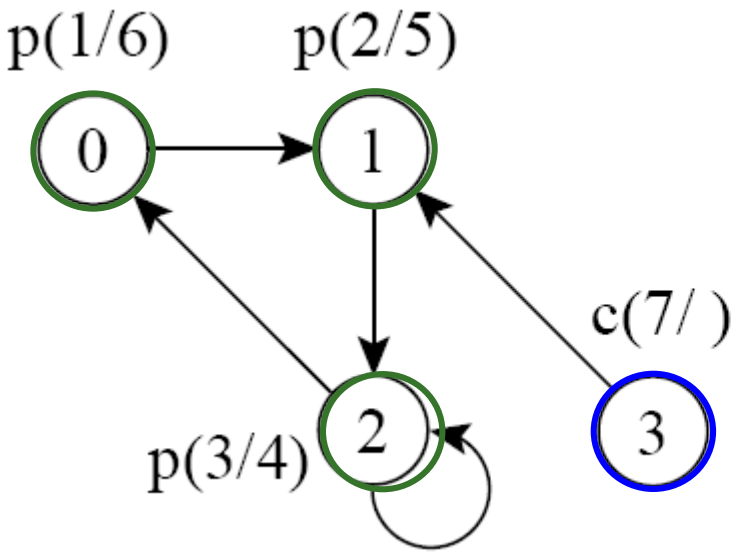
DFS

- Exemplo detalhado



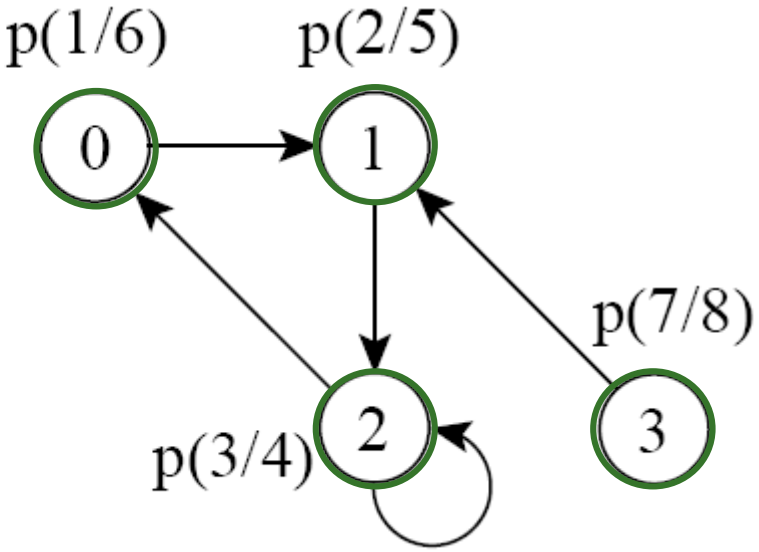
DFS

- Exemplo detalhado



DFS

- Exemplo detalhado



Complexidade do DFS

O(|V| + |A|)

- A função DFS é chamada exatamente uma vez para cada vértice de V
- A cada chamada da função, o laço é executado |adj[v]| vezes, i.e., ele será executado O(|A|) vezes no total

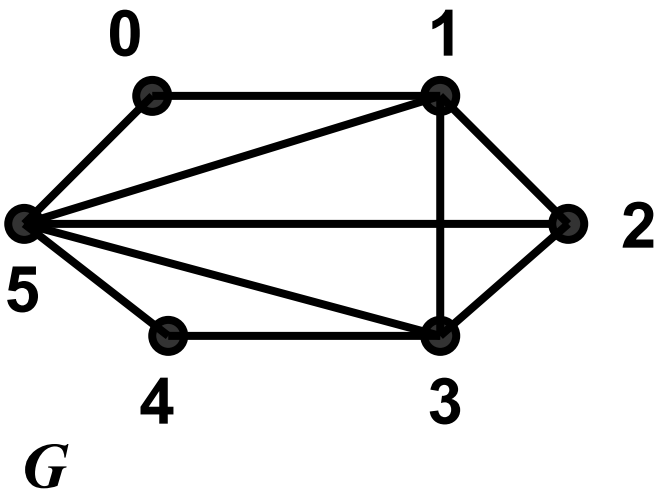
DFS - algoritmo

```
procedure DFS(G, v) is
    label v as gray
    for all edges (v,w) in G.adjacentEdges(v) do
        if vertex w not labeled as gray then
            call DFS(G, w)
    label v as black
```

Exercícios

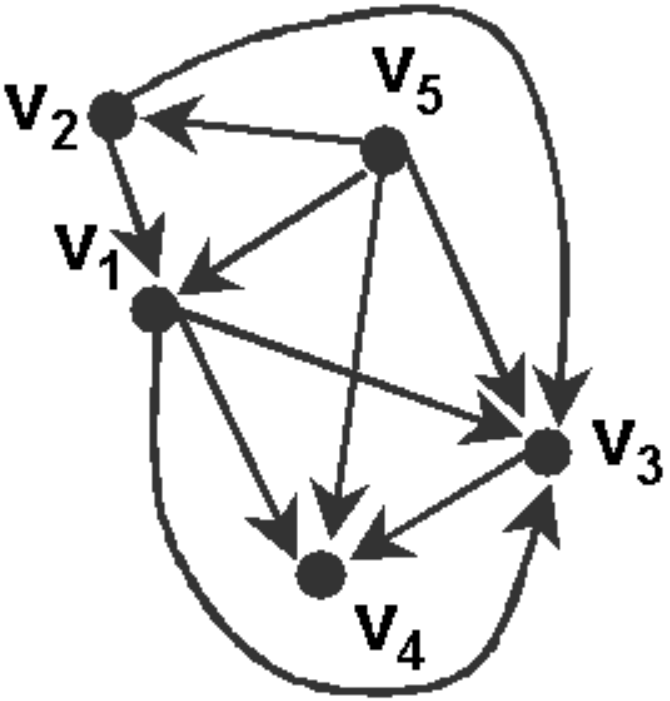
DFS

- Faça a busca em profundidade no grafo abaixo



DFS

- Faça a busca em profundidade no grafo abaixo



DFS

- Implemente a busca em profundidade

DFS - algoritmo

- Costuma-se registrar o tempo de descoberta (cinza) e o tempo de término da busca (preto) de cada vértice
- Também é conveniente registrar o antecessor de cada vértice no caminho DFS a partir do vértice inicial

Implementação DFS

- Implementação a seguir usa 4 vetores de tamanho $n = |V|$
  - **cor**[i]: cor do vértice *i* (*branco* no início, *cinza* assim que descoberto, *preto* assim que processado)
  - **antecessor**[i]: o vértice antecessor de *i* no trajeto DFS a partir do vértice inicial
  - **d**[i]: o momento da descoberta do vértice *i* (cinza)
  - **t**[i]: o momento do processamento do vértice *i* (preto)

```
/* função para busca em profundidade, utiliza função auxiliar visita_dfs
*/

void busca_profundidade(Grafo *G) {
    ...
    int d[MaxNumVertices], t[MaxNumVertices], antecessor[MaxNumVertices];
    TipoCor cor[MaxNumVertices];

                                        .
                                        .
                                        .

}
```

Implementação DFS

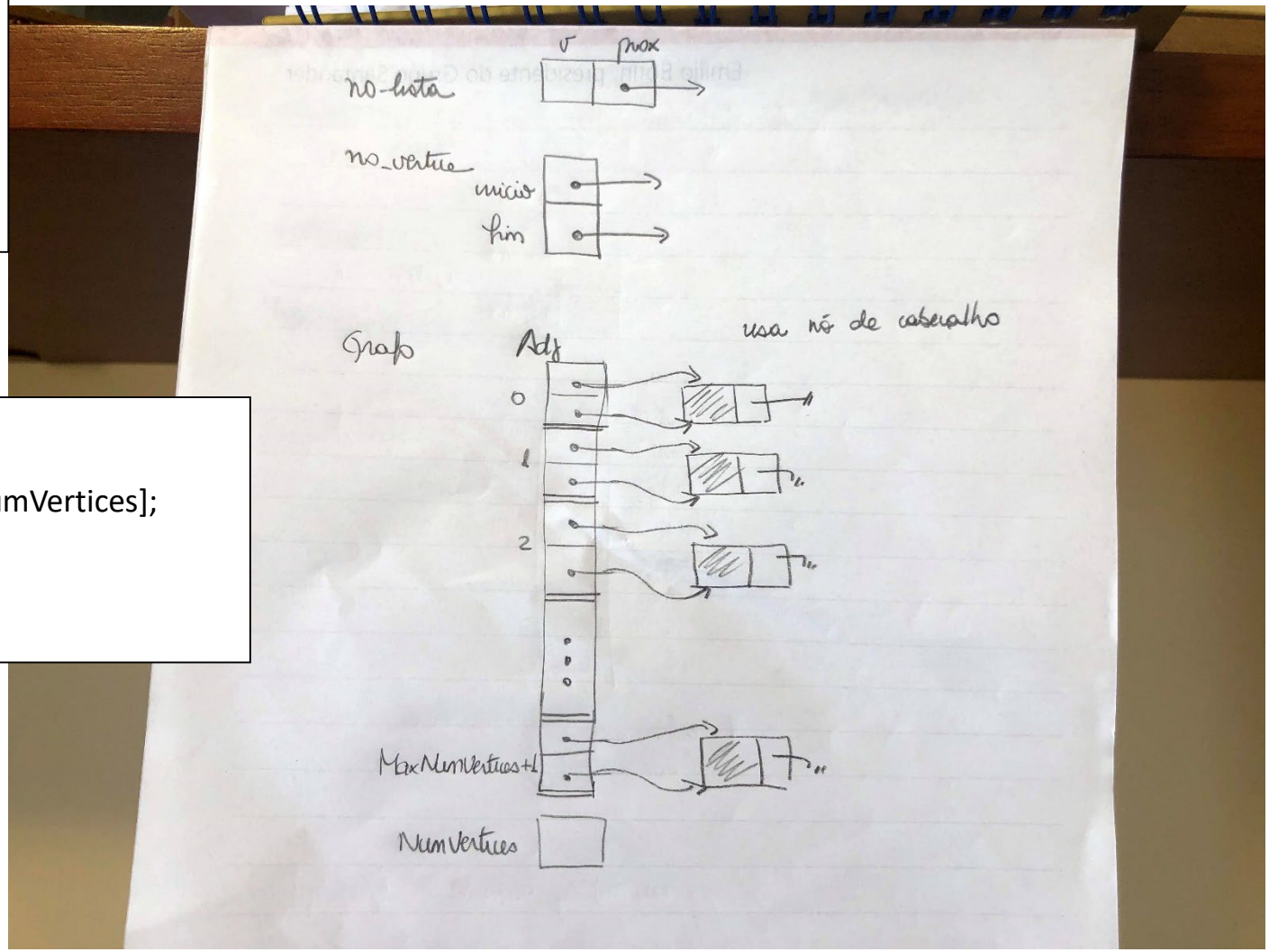
- Usamos a mesma estrutura de dados Grafo que já usamos no BFS

- Idem para as funções auxiliares *ListaAdjVazia()*, *PrimeiroListaAdj()*, *ProxAdj()*, que fazem parte de uma implementação do TAD Grafo...

  - Ver no Moodle o arquivo com códigos BFS

Lembrando...

```
typedef struct no_lista {
                elem v;
        struct no_lista *prox;
} no_lista;

typedef struct {
      no_lista *inicio, *fim;
} no_vertice;
```




```
typedef struct {
      no_vertice Adj[MaxNumVertices];
      int NumVertices;
} Grafo;
```

Implementação DFS

- A função *void busca_profundidade(Grafo *G)* inicializa o processo:
  - A *cor* de todos os vértices é inicializada como *branco*
  - *O antecessor* de todos os vértices é inicializado com *-1*

  - Em seguida (dentro do 2º. laço) chama a função *visita_dfs()*, que implementa o percurso DFS a partir de um vértice inicial, no caso o vértice 0
    - Esse 2º. laço *for (V= 0; ... V++)* garante que todos os vértices serão visitados, mesmo que o grafo tenha mais de uma componente conexa!

```
/* função para busca em profundidade, utiliza função auxiliar visita_dfs
*/

void busca_profundidade(Grafo *G) {
    int V, tempo;
    int d[MaxNumVertices], t[MaxNumVertices], antecessor[MaxNumVertices];
    TipoCor cor[MaxNumVertices];

    printf("*** Sequencia de nos visitados na busca em profundidade ***\n\n");

    tempo= 0;
    for (V= 0; V < G->NumVertices; V++) {
        cor[V]= branco;
        antecessor[V]= -1;
    }

    for (V= 0; V< G->NumVertices; V++)
        if (cor[V] == branco)
            visita_dfs(G, V, &tempo, d, t, cor, antecessor);
}
```

Implementação DFS

- A função *visita_dfs()* é recursiva, nos moldes do pseudocódigo visto...

```
procedure DFS(G, v) is
    label v as gray
    for all edges (v,w) in G.adjacentEdges(v) do
        if vertex w not labeled as gray then
            call DFS(G, w)
    label v as black
```

  - 'Descobre' o vértice atual, segue adiante no caminho seguindo para o seu primeiro vértice adjacente que ainda não foi descoberto...
  - Quando todos os adjacentes tiverem sido descobertos a execução atual é retomada e o processamento desse vértice é finalizado

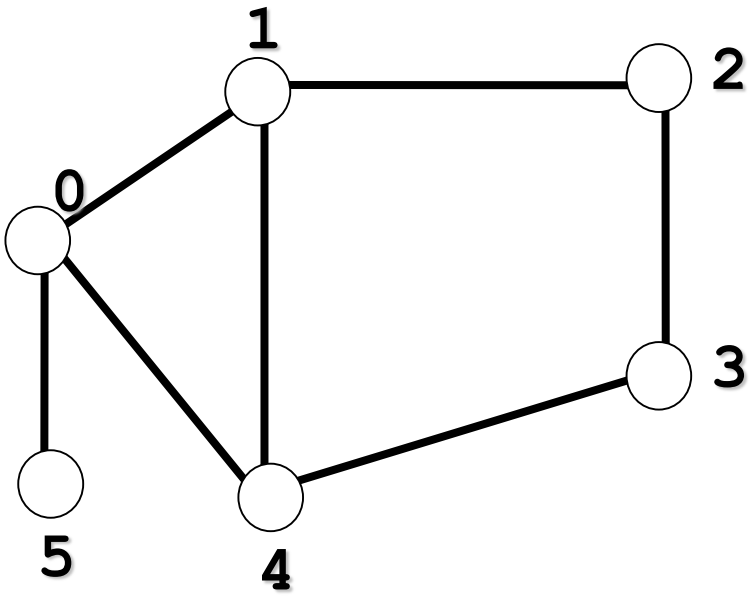
Implementação DFS

- A função *visita_dfs()* também registra o vértice antecessor e os tempos de descoberta e de processamento de cada vértice
- Parâmetros da função
  - Grafo *G: a estrutura de dados que representa o grafo
  - **int** V: o vértice inicial da busca
  - **int** *tempo: a variável que registra o tempo (passo)
  - **int** d[], **int** t[], **TipoCor** cor[], **int** antecessor[]: os vetores que registram, para cada vértice, o tempo da descoberta, o tempo do processamento, a cor e o antecessor no caminho. Os conteúdos dos vetores cor[] e antecessor[] foram inicializados antes da chamada, e sofrem alterações dentro da função. Os vetores d[] e t[] são alterados dentro da função.

```
void visita_dfs(Grafo *G, int V, int *tempo, int d[], int t[], TipoCor cor[], int antecessor[])
{
   int FimListaAdj, erro;
   no_lista *Adj, *Aux;

   cor[V]= cinza;     (*tempo)++;     d[V]= *tempo;

   if (!ListaAdjVazia(G, V, &erro)) {
      Aux= PrimeiroListaAdj(G, V, &erro);
      FimListaAdj= 0;
      while (!FimListaAdj) {
            ProxAdj(G, &Adj, &Aux, &FimListaAdj);
            if (cor[Adj->v] == branco) {
               antecessor[Adj->v]= V;
               visita_dfs(G, Adj->v, tempo, d, t, cor, antecessor);
            }
      }
   }

   cor[V]=preto;       (*tempo)++;             t[V]=*tempo;

   printf("No %d, descoberta=%d, termino=%d, antecessor=%d\n", V, d[V], t[V], antecessor[V]);
}
```

Implementação DFS

- Execução *busca_profundidade(Grafo *G)*

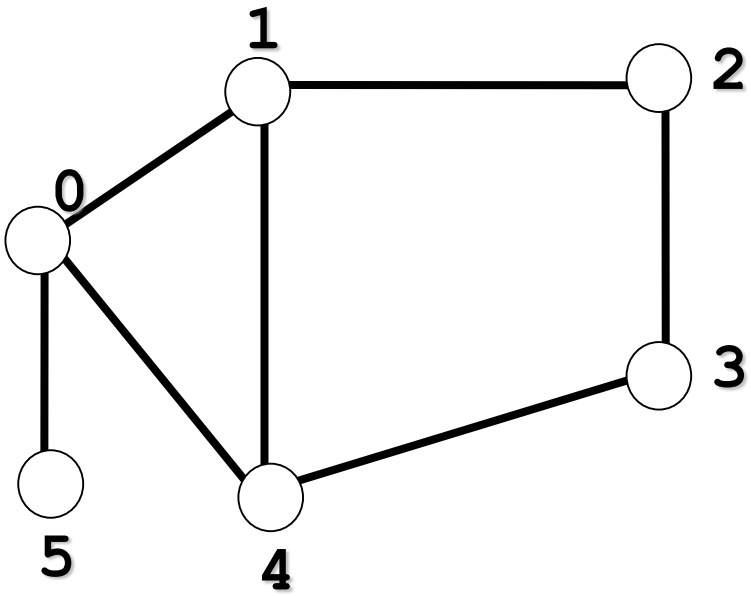


*** Sequencia de nos visitados na busca em profundidade ***

No 4, descoberta=5, termino=6, antecessor=0
No 3, descoberta=4, termino=7, antecessor=0
No 2, descoberta=3, termino=8, antecessor=0
No 1, descoberta=2, termino=9, antecessor=0
No 5, descoberta=10, termino=11, antecessor=0
No 0, descoberta=1, termino=12, antecessor=-1
Pressione qualquer tecla para continuar. . .

Implementação DFS

- Execução *busca_profundidade(Grafo *G)*



*** Sequencia de nos visitados na busca em profundidade ***

No 4, descoberta=5, termino=6, antecessor=0
No 3, descoberta=4, termino=7, antecessor=0
No 2, descoberta=3, termino=8, antecessor=0
No 1, descoberta=2, termino=9, antecessor=0
No 5, descoberta=10, termino=11, antecessor=0
No 0, descoberta=1, termino=12, antecessor=-1
Pressione qualquer tecla para continuar. . .

Basta olhar a sequencia de antecessores para saber o caminho a partir do vértice inicial até um vértice qualquer, p.ex.:
Caminho DFS de 0 a 5: 4 3 2 1 0
Caminho DFS de 0 a 5: 5 0

Complexidade do DFS

O(|V| + |A|)

- A função *visita_dfs* é chamada exatamente uma vez para cada vértice de V
- Na função *visita_dfs*, o laço é executado |adj[v]| vezes, i.e., será executado O(|A|) vezes no total

```
void busca_profundidade(Grafo *G) {

            ...

    for (V= 0; V< G->NumVertices; V++)
        if (cor[V] == branco)
            visita_dfs(G, V, &tempo, d, t, cor, antecessor);
}

void visita_dfs(Grafo *G, int V, int *tempo, int d[], int t[], TipoCor cor[], int antecessor[])
{

                        ...

while (!FimListaAdj) {
            ProxAdj(G, &Adj, &Aux, &FimListaAdj);
            if (cor[Adj->v] == branco) {
               antecessor[Adj->v]= V;
               visita_dfs(G, Adj->v, tempo, d, t, cor, antecessor);
            }
      }
   }
                        ...
}
```