Provinha 2 20/04/23

① Resolva o sistema linear $\begin{cases} y' = 5y - 7z \\ z' = -2z \end{cases}$.

② Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Resolva o sistema $Y' = A \cdot Y$ onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

A resposta deve ser real, mesmo que você tenha que usar números complexos para chegar lá. Você pode usar as propriedades comuns da exponencial, mesmo que o expoente seja complexo.

Resposta de 2

Começamos encontrando os autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

<u>Polinômio característico</u> : $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (2a)\lambda + (a^2+b^2)$

<u>Raízes de $p_A(\lambda)$ = autovalores de A</u> : $\lambda = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4b^2}}{2} = a \pm ib$

Isto é, os autovalores de A são os <u>complexos conjugados</u>

$$\underline{\lambda = a+ib} \quad e \quad \underline{\bar{\lambda} = a - ib}$$

Encontremos agora os autovetores associados:

Temos que resolver $(A-\lambda I)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}(a-(a\pm ib))\,x + by = 0\\ -bx + (a-(a\pm ib))\,y = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\cancel{b}y = \pm i\cancel{b}x\\ -\cancel{b}x = \pm i\cancel{b}y\end{cases} \iff \begin{cases}y = \pm ix\\ -x = \pm iy\end{cases}$$

As duas equações à direita são equivalentes já que $1/i = -i$.

Portanto, os autovetores associados a

$$\underline{\lambda = a+ib} \rightsquigarrow \boxed{v = \begin{bmatrix}x\\ix\end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \underline{\bar{\lambda} = a-ib} \rightsquigarrow \boxed{\bar{v} = \begin{bmatrix}x\\-ix\end{bmatrix}}$$

Por exemplo, tomamos $v = \begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ e $\bar{v} = \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ (x é real)

Note que, tomando $x \in \mathbb{R}$, os autovetores associados a λ e $\bar{\lambda}$ também são complexos conjugados: $\lambda \rightsquigarrow v$ e $\bar{\lambda} \rightsquigarrow \bar{v}$.

Assim

$$A \cdot \begin{bmatrix} | & | \\ v & \bar{v} \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v & \bar{v} \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & \\ & a-ib \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+ib & \\ & a-ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

Portanto

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t(a+ib)} & \\ & e^{t(a-ib)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

Agora usamos $e^{a+ib} = e^{a} \cdot e^{ib}$ para obter

$$e^{tA} = \frac{e^{ta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{ibt} & \\ & e^{-ibt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^{ta}}{2} \begin{bmatrix} e^{ibt} + e^{-ibt} & (-i)\left(e^{ibt} - e^{-ibt}\right) \\ i\left(e^{ibt} - e^{-ibt}\right) & e^{ibt} + e^{-ibt} \end{bmatrix}$$

Lembrando da Fórmula de Euler, $e^{ibt} = \cos bt + i \operatorname{sen} bt$, segue que

$$e^{ibt} + e^{-ibt} = 2\cos bt \quad \text{e} \quad e^{ibt} - e^{-ibt} = 2i \operatorname{sen} bt$$

e assim

$$e^{tA} = e^{ta} \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

Como sabemos a solução de $Y' = A \cdot Y$ é $Y(t) = e^{tA} \cdot Y_0$.

Assim, para $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, obtemos

$$Y(t) = e^{t\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{ta} \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -\operatorname{sen} bt & \cos bt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{ta} \begin{bmatrix} y_0 \cos bt + z_0 \operatorname{sen} bt \\ -y_0 \operatorname{sen} bt + z_0 \cos bt \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} y(t) = e^{ta}\left(y_0 \cos bt + z_0 \operatorname{sen} bt\right) \\ z(t) = e^{ta}\left(z_0 \cos bt - y_0 \operatorname{sen} bt\right) \end{cases}$$