

### 4.4.2 Problemas de valor de contorno com dielétricos lineares

Em um dielétrico linear homogêneo, a densidade de carga de polarização ( $\rho_p$ ) é proporcional à densidade da carga livre ( $\rho_l$ ):<sup>9</sup>

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = - \left( \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_l. \quad (4.39)$$

Em particular, a menos que a carga livre esteja de fato fixada no material,  $\rho = 0$ , e qualquer carga líquida deve estar na superfície. Dentro desse dielétrico, então, o potencial obedece à equação de Laplace e todos os mecanismos do Capítulo 3 se aplicam. É conveniente, no entanto, reescrever as condições de contorno de uma forma que faça referência apenas à carga livre. A Equação 4.26 diz

$$\epsilon_{\text{acima}} E_{\text{acima}}^\perp - \epsilon_{\text{abaixo}} E_{\text{abaixo}}^\perp = \sigma_l, \quad (4.40)$$

ou (em termos de potencial),

$$\epsilon_{\text{acima}} \frac{\partial V_{\text{acima}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{abaixo}} \frac{\partial V_{\text{abaixo}}}{\partial n} = -\sigma_l, \quad (4.41)$$

ao passo que o potencial em si é, portanto, contínuo (Equação 2.34):

$$V_{\text{acima}} = V_{\text{abaixo}}. \quad (4.42)$$

#### Exemplo 4.7

Uma esfera de material dielétrico linear e homogêneo é colocada em um campo elétrico  $\mathbf{E}_0$  (Figura 4.27). Encontre o campo elétrico dentro da esfera.

**Solução:** este exemplo é similar ao Exemplo 3.8, no qual uma esfera condutora de carga nula era introduzida em um campo uniforme. Naquele caso, o campo da carga induzida cancelava completamente  $\mathbf{E}_0$  dentro da esfera. Em um dielétrico, o cancelamento (da carga produzida pela carga de polarização) é apenas parcial.

Nosso problema é resolver a equação de Laplace para  $V_{\text{dentro}}(r, \theta)$  quando  $r \leq R$ , e  $V_{\text{fora}}(r, \theta)$  quando  $r \geq R$ , respeitadas as condições de contorno

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & V_{\text{dentro}} = V_{\text{fora}}, \quad \text{em } r = R, \\ \text{(ii)} \quad & \epsilon \frac{\partial V_{\text{dentro}}}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial V_{\text{fora}}}{\partial r}, \quad \text{em } r = R, \\ \text{(iii)} \quad & V_{\text{fora}} \rightarrow -E_0 r \cos \theta, \quad \text{para } r \gg R. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

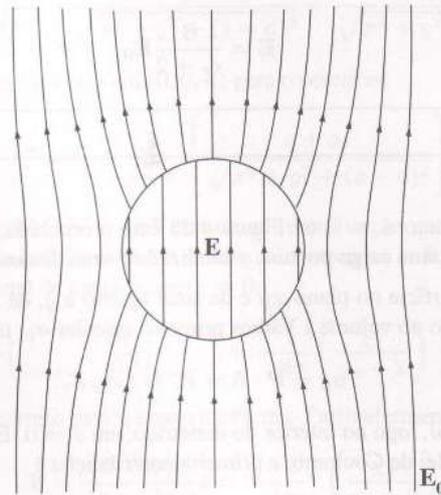


Figura 4.27

<sup>9</sup> Isso não se aplica à carga superficial ( $\sigma_p$ ), porque  $\chi_e$  não é independente de posição (obviamente) no contorno.

(A segunda condição decorre da Equação 4.41, já que não há carga livre na superfície.) Dentro da esfera, diz a Equação 3.65 que

$$V_{dentro}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta); \tag{4.44}$$

fora da esfera, diante de (iii), temos

$$V_{fora}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \tag{4.45}$$

A condição de contorno (i) requer que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = -E_0 R \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

portanto<sup>10</sup>

$$\left. \begin{aligned} A_l R^l &= \frac{B_l}{R^{l+1}}, \quad \text{para } l \neq 1, \\ A_1 R &= -E_0 R + \frac{B_1}{R^2}. \end{aligned} \right\} \tag{4.46}$$

Por sua vez, a condição (ii) resulta em

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta),$$

então

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r l A_l R^{l-1} &= -\frac{(l+1) B_l}{R^{l+2}}, \quad \text{para } l \neq 1, \\ \epsilon_r A_1 &= -E_0 - \frac{2 B_1}{R^3}. \end{aligned} \right\} \tag{4.47}$$

Segue-se que

$$\left. \begin{aligned} A_l &= B_l = 0, \quad \text{para } l \neq 1, \\ A_1 &= -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0. \end{aligned} \right\} \tag{4.48}$$

Evidentemente,

$$V_{dentro}(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z,$$

e, portanto, o campo interno da esfera é (surpreendentemente) *uniforme*:

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0. \tag{4.49}$$

### Exemplo 4.8

Suponha que toda a região abaixo do plano  $z = 0$  na Figura 4.28 está preenchida com material dielétrico linear e uniforme de suscetibilidade  $\chi_e$ . Calcule a força sobre uma carga pontual  $q$  localizada a uma distância  $d$  acima da origem.

**Solução:** a carga de polarização de superfície no plano  $xy$  é de sinal oposto a  $q$ , de forma que a força será atrativa. (Em vista da Equação 4.39, não há carga de polarização no volume.) Vamos primeiro calcular  $\sigma_p$ , usando as Equações 4.11 e 4.30.

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z,$$

onde  $E_z$  é o componente  $z$  do campo total, logo no interior do dielétrico, em  $z = 0$ . Esse campo é devido em parte a  $q$  e em parte à própria carga de polarização. A partir da lei de Coulomb, a primeira contribuição é

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + d^2)} \cos \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}},$$

10. Lembre-se,  $P_l(\cos \theta) = \cos \theta$ , e os coeficientes devem ser iguais para cada  $l$ , como você poderia comprovar multiplicando por  $P_l(\cos \theta) \sin \theta$ , integrando de  $0$  a  $\pi$ , e recorrendo à ortogonalidade dos polinômios de Legendre (Equação 3.68).