Teorema de Cantor - Bernstein

Teorema: Sejam A e B dois conjuntos. Se existe uma função injetora $f : A \longrightarrow B$ e uma função injetora $g : B \longrightarrow A$ então A e B são equipotentes.

A demonstração do teorema é corolário da seguinte proposição:

Proposição: Sejam A, B, A_1 conjuntos tais que $A_1 \subseteq B \subseteq A$. Se $|A| = |A_1|$ então $|A| = |B|$.

Demonstração: Como $|A| = |A_1|$, existe uma função bijetora $f : A \longrightarrow A_1$.

Vamos designar, para todo $n \in \mathbb{N}$,

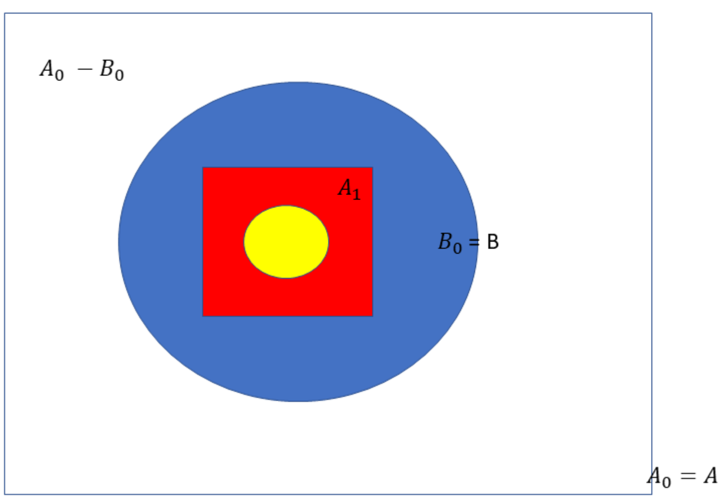
$A_0 = A$ $\qquad\qquad$ $B_0 = B$

$A_{n+1} = f(A_n)$ $\qquad\qquad$ $B_{n+1} = f(B_n)$

Temos:

$$A_1 = f(A_0) = f(A)$$

$$A_1 \subseteq B_0 = B \qquad \Rightarrow \qquad A_2 = f(A_1) \subseteq f(B_0) = B_1$$



De modo geral,

$A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

isto é,

$A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1} \ldots$

Considere $C_n = A_n - B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Como f é bijetora, vale que $f(C_n) = f(A_n - B_n) = f(A_n) - f(B_n) = A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1}$,

e portanto,

$f(C_n) = C_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos designar $C = \bigcup_{n\geq 0} C_n$. Então $f(C) = f(\bigcup_{n\geq 0} C_n) = \bigcup_{n\geq 1} C_n$

Seja $D = A - C$. Então $C \cup \ D = A$. Considere a função $g : A \longrightarrow A$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in C \\ x & \text{se } x \in D \end{cases}$$

Temos que $g_{|D}$ é a função identidade, e portanto, é injetora. Por sua vez, $g_{|C} = f$ e f é injetora. Portanto, $g_{|C}$ também é injetora. Como $C \bigcap D = \emptyset$, vale que g é uma função injetora.

Além disso,

$$g(D) = D = A - C$$

$$g(C) = f(C) = \bigcup_{n\geq 1} C_n = C - C_0$$

Sendo assim, $g(A) = ((A - C) \bigcup (C - C_0) = A - C_0 = A - ((A - B)) = B$, e portanto, $g : A \longrightarrow B$ é bijetora. Concluimos que $|A| = |B|$. $\triangle$

Passemos agora à prova do teorema de Cantor-Bernstein:

Como $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ são funções injetoras, vale que a função composta $g \circ f : A \longrightarrow A$ também o é. Dessa forma, $g(f(A)) \equiv \ A$

Além disso, $g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq A$.

Como $|g(f(A))| = |A|$, segue, da proposição anterior, que $|g(B)| = |A|$. Mas $|G(B)| = |B|$. Logo, $|A| = |B|$. $\triangle$